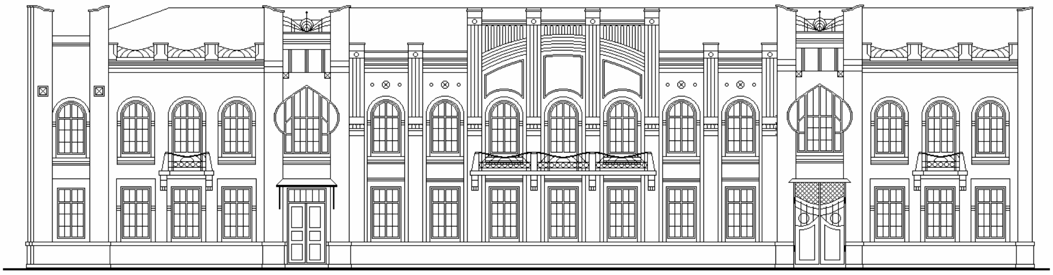
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ



УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Методические указания и задания к расчетно-графической работе по курсу “Сопротивление материалов” для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения

Краснодар
2006

Составители: д-р. физ.-мат. наук, проф. Н. Н. Фролов,
канд. физ.-мат. наук, доц. С. Ю. Молдаванов,
канд. физ.- мат. наук, доц. С.Б. Лозовой

УДК 539.3

Устойчивость центрально сжатых стержней. Методические указания и задания к расчетно-графической работе по курсу «Сопротивление материалов» для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения / Сост.: Н.Н. Фролов, С.Ю. Молдаванов, С.Б. Лозовой; Кубан. гос. технол. ун-т. Каф. сопротивления материалов и строительной механики. – Краснодар: Изд. КубГТУ, 2005. – 38 с.

Предлагаемые методические указания содержат набор типовых задач, входящих в состав расчетно-графической работы по курсу “Сопротивление материалов”, посвященной рассмотрению вопросу потери устойчивости центрально сжатых стержней. Предназначены для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения.

Ил. 16. Табл. 2.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Кубанского государственного технологического университета

Рецензенты: канд. техн. наук, доц. кафедры строительных конструкций и гидротехнических сооружений КубГТУ В.А. Гуминский;

канд. техн. наук, доц. кафедры сопротивления материалов и строительной механики КубГТУ В. В. Попов

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Понятие устойчивости широко используется для характеристики различных систем – биологической, химической или механической. Применительно к механической системе понятие устойчивости можно трактовать, как способность системы пребывать в состояниях, для которых определяющие параметры (координаты точек системы, их скорости и ускорения) при действии на систему заданного возмущающего воздействия остаются в заданных пределах. Любое устойчивое состояние механической системы одновременно является и равновесным, для которого выполняются уравнения равновесия статики. Однако равновесные состояния механической системы могут быть качественно различны.

Если при достаточно малых внешних возмущениях отклонения системы в последующем ее движении мало отличается от невозмущенного состояния, то это невозмущенное состояние устойчиво. При этом устойчивым состояниям равновесия, как известно из курса теоретической механики, соответствует минимальное значение потенциальной энергии системы. Когда потенциальная энергия в состоянии равновесия такова, что при малых отклонениях системы от положения равновесия ее величина не изменяется, то такое состояние системы называется безразличным. В случае, когда потенциальная энергия принимает максимальное значение в положении равновесия, то такое состояние системы неустойчиво. Для наглядности эти состояния равновесия механической системы можно проиллюстрировать равновесными состояниями шара, как показано на рис. 1.1.

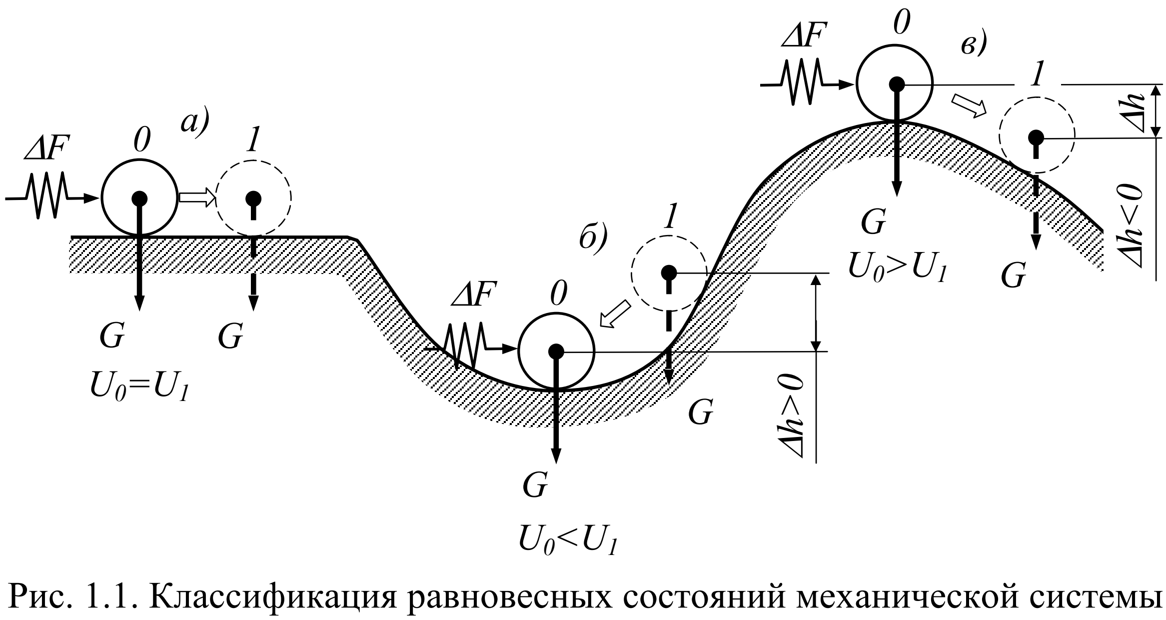


Рис. 1.1. Классификация равновесных состояний механической системы

а) безразличное состояние;

б) устойчивое состояние;

в) неустойчивое состояние.

2 ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЦЕНТРАЛЬНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

2.1 ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

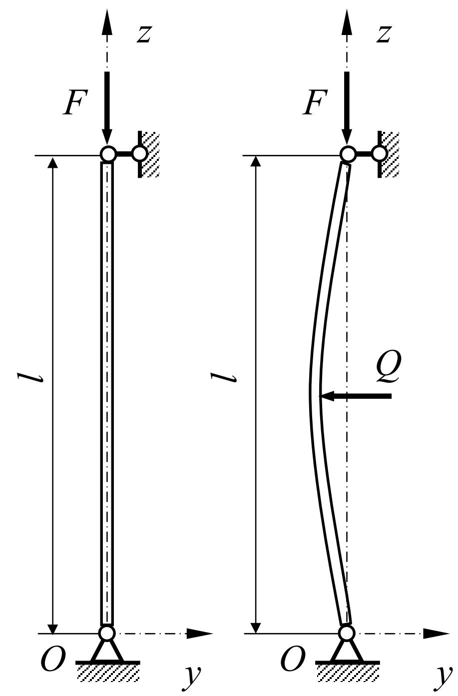


Рис. 2.1. Устойчивость сжатого стержня

Рассмотрим прямолинейный упругий стержень с шарнирно опертыми концами находящийся под действием продольной сжимающей силы F (рис.2.1). Для множества значений сжимающей силы $F < F_{cr}$ (где F_{cr} – некоторое критическое значение) стержень будет сохранять свою прямолинейную форму как равновесную. Если к этому стержню приложить малое внешнее возмущение, например в виде поперечной силы Q, то стержень искривится (отклонится от своего равновесного состояния). и примет криволинейную форму. После снятия внешнего возмущения Q стержень вновь вернется к своему прямолинейному равновесному состоянию. В этом случае прямолинейная форма равновесия является устойчивой по отношению к заданному возмущению.

Если сжимающая сила удовлетворяет условию $F \geq F_{cr}$, то прямолинейная форма равновесия перестает быть единственно возможным равновесным состоянием стержня. Наряду с ней существуют и другие искривленные формы равновесия. При критической нагрузке стержень переходит к новой криволинейной форме равновесия, что связано с появлением качественно новых деформаций. Сжимающая сила вызывает дополнительно изгибающие моменты, линейная зависимость между нагрузками и деформациями нарушается; наблюдается сильное нарастание прогибов при малом увеличении сжимающей силы. Это явление называется продольным изгибом. Переход в критическое состояние, как правило, сопровождается потерей несущей способности стержня и называется потерей устойчивости. Для обеспечения устойчивости заданного деформированного состояния в конструкциях, и сооружениях допускаются нагрузки, составляющие лишь часть критических. Отношение критической нагрузки к ее допускаемой величине называется коэффициентом запаса

Впервые задача определения критической силы для центрально сжатого стержня была решена Л. Эйлером (1774 г.). Критической силой по Эйлеру называется наименьшее значение сжимающей силы, приложенной к прямолинейному стержню, при котором наблюдается раздвоение форм равновесия.

Предположим, что при некотором значении $F = F_{cr}$ (рис. 2.2) наряду с прямолинейной формой равновесия линейно-упругого стержня существует и искривленная форма равновесия, которая может быть описана функцией перемещений точек, принадлежащих его оси $v = v(z)$.

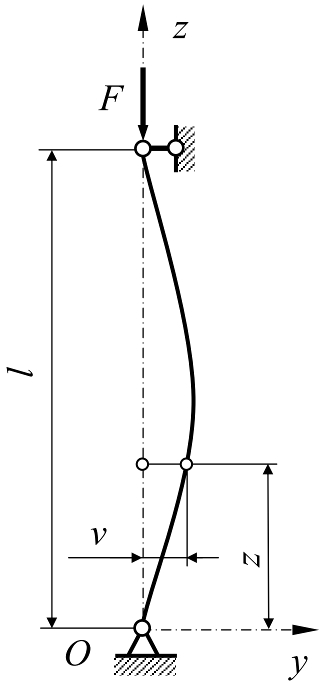


Рис. 2.2. Задача Эйлера

Изгибающий момент, возникающий в произвольном поперечном сечении при потере устойчивости прямолинейной формы равновесия сжатого стержня равен

$$M_x = F \cdot v .$$

Воспользуемся приближенным дифференциальным уравнением изогнутой оси стержня в виде[1]

$$\frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{M_x}{EJ_x} = -\frac{F \cdot v}{EJ_x} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 v}{dz^2} + k^2 v = 0,$$

где k - коэффициент, равный $k = \sqrt{F / EJ_x}$.

Решение записанного однородного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$v = A \cdot Cos(kz) + B \cdot Sin(kz).$$

Для определения произвольных постоянных A и B используем граничные условия (условия закрепления концов стержня).

Первым граничным условием является: при $z = 0$ прогиб $v = 0$ и, следовательно, произвольная постоянная $A = 0$. Таким образом, уравнение изогнутой оси стержня принимает вид

$$v = B \cdot Sin(kz)$$

Следовательно, при потере устойчивости ось линейно-упругого стержня изгибается по синусоиде.

Вторым граничным условием является: при $z = l$ прогиб $v = 0$ и, следовательно, $B \cdot Sin(kl) = 0$. Это условие выполняется в двух случаях

$$1)\ B = 0; \qquad\qquad 2)\ Sin(kl) = 0.$$

Первый случай соответствует прямолинейной форме равновесия стержня. Второе условие соответствует множеству значений $kl = \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi$, что соответствует следующим значениям критической силы:

---

[1] Знак «минус» взят потому, что в выбранной системе координат кривизна деформированного состояния стержня отрицательна, а изгибающий момент положительный.

$$F_{1cr}=\frac{\pi^2\cdot EJ_x}{l^2},\ F_{2cr}=\frac{(2\pi)^2\cdot EJ_x}{l^2},\ F_{3cr}=\frac{(3\pi)^2\cdot EJ_x}{l^2},\ldots,\ F_{n\,cr}=\frac{(n\pi)^2\cdot EJ_x}{l^2}.$$

Каждому из найденных значений критической силы соответствует определенная форма равновесия стержня. Подставляя найденное значение k в уравнение изогнутой оси бруса, замечаем, что при первой критической силе стержень изгибается по одной полуволне синусоиды, а при прочих значениях число полуволн равно множителю при числе π (рис. 2.3).

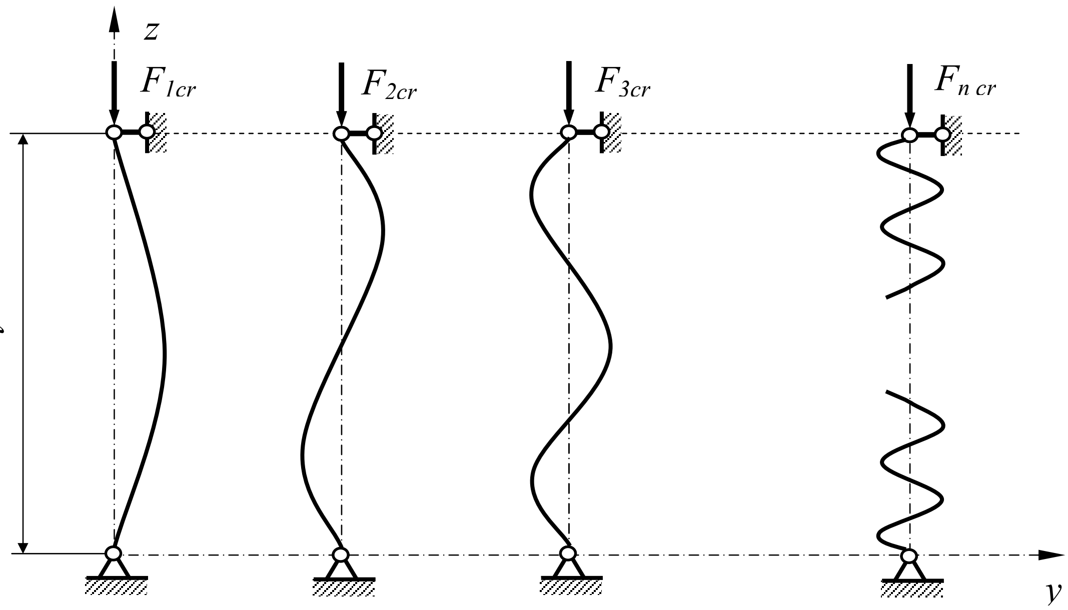


Рис. 2.3. Формы потери устойчивости сжатого стержня

Следует отметить, что форма равновесия стержня, соответствующая первой критической силе, является устойчивой, а все остальные формы равновесия – неустойчивыми.

Для инженерных расчетов на устойчивость представляет интерес только минимальное значение сжимающей силы, при которой наблюдается изгиб оси стержня. Это значение соответствует первой критической силе

$$F_{cr}=\frac{\pi^2\cdot EJ_x}{l^2}.$$

Полученное выражение принято называть формулой Эйлера для определения критической силы. При этом выясняется резкое различие в характере работы стержня на одноосное сжатие и растяжение. Предельная растягивающая сила $F_{ut}=A\cdot\sigma_{ut}$ зависит от предела прочности материала на растяжение σ_{ut}, но не зависит от длины стержня. Величина критической силы не зависит от прочностных характеристик материала, но зависит от длины стержня.

При выводе формулы Эйлера было установлено, что стержень изгибается по синусоиде, а численные значения прогибов найти не удалось (численное значение произвольной постоянной B не найдено). Это связано с тем, что было использовано приближенное уравнение изогнутой оси стержня

$$\frac{d^2v}{dz^2} + k^2 v = 0.$$

Если применить точное дифференциальное уравнение

$$\frac{\dfrac{d^2v}{dz^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dv}{dz}\right)^2\right]^{3/2}} + k^2 v = 0,$$

то при $F \geq F_{cr}$ можно найти численные значения прогибов стержня при потере устойчивости. Интегрирование этого уравнения выполняется с помощью сложных специальных функций.

2.2 ВЛИЯНИЕ СПОСОБОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ КОНЦОВ СТЕРЖНЯ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Рассмотрим потерю устойчивости центрально сжатого линейно-упругого стержня длиной l, на одном конце которого имеется защемление, а другой его конец остается свободным. Деформированное состояние стержня показано на рис. 2.4. Дополним деформированное состояние до полуволны синусоиды путем зеркального отражения стержня в отрицательную область по оси z. В этом случае деформированное состояние соответствует потере устойчивости шарнирно закрепленного стержня, имеющего длину $2l$. Тогда, подставляя длину $2l$ в формулу Эйлера, получаем

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_x}{(2l)^2}.$$

Аналогичным образом можно рассмотреть потерю устойчивости сжатых стержней и при других способах закрепления концов (рис. 2.4). Величину критической силы можно записать в общем виде

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_x}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_x}{(l_0)^2}$$

где μ - коэффициент приведенной длины;

$l_0 = \mu l$ - приведенная (свободная) длина стержня.

Коэффициент приведенной длины μ показывает, сколько раз укладывается длина заданного стержня в длине шарнирно опертого стержня, имеющего такую же критическую силу, как и заданный стержень.

При применении формулы Эйлера для определения критических сил сжатых стержней, следует считаться с возможность различных форм потери устойчивости в главных плоскостях инерции. В этом случае необходимо определять две критические силы

$$F_{cr\,x} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_x}{(\mu_x l)^2} \quad \text{и} \quad F_{cr\,y} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_y}{(\mu_y l)^2}.$$

Из двух найденных критических сил для дальнейшего расчета принимается наименьшее значение.

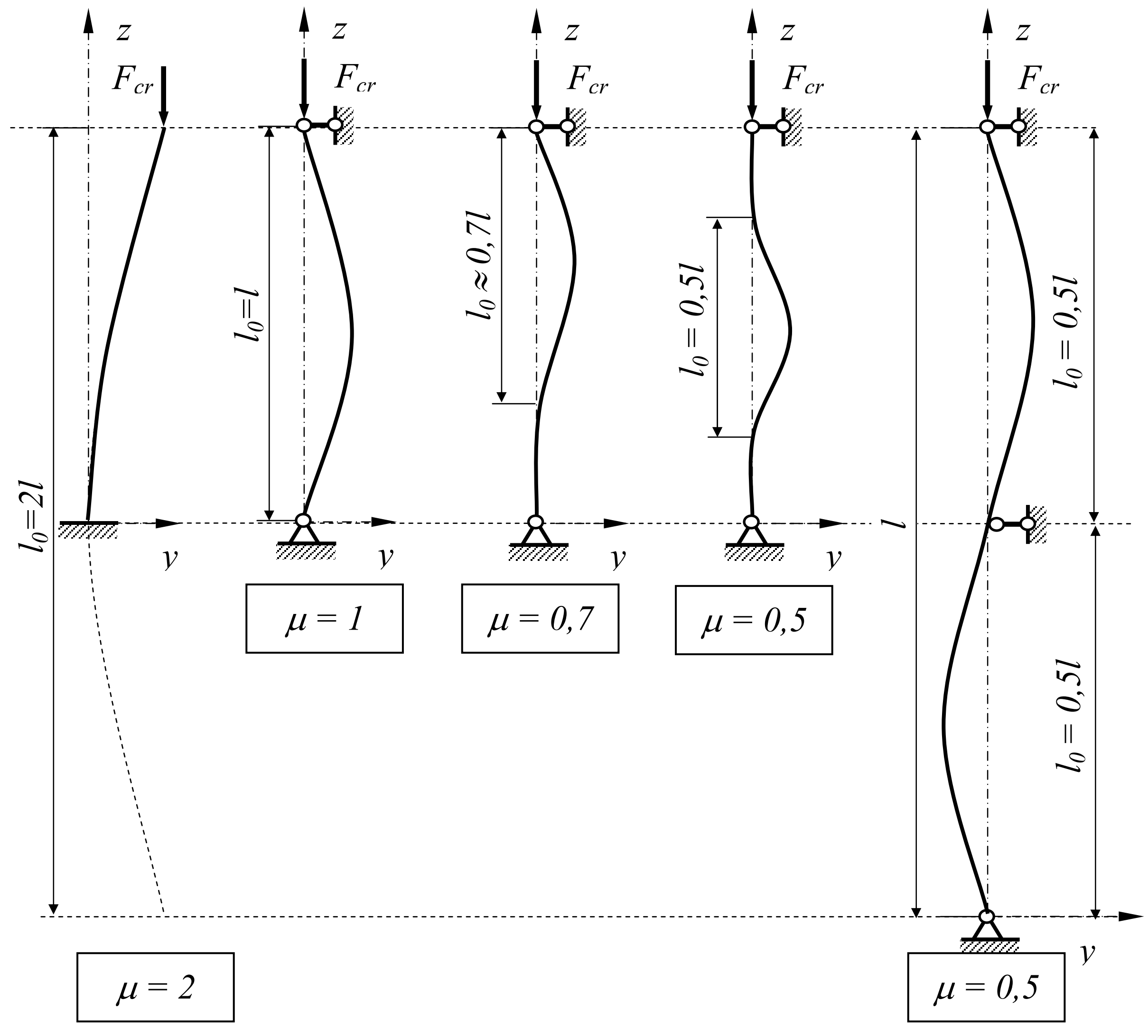


Рис. 2.4. Коэффициенты приведения длины

В связи с этим возникает вопрос о рациональных типах поперечного сечения сжатых стержней. Понятно, что наиболее рациональным будет такой сжатый стержень, для которого $F_{cr\,x} = F_{cr\,y}$. Такой стержень называется равноустойчивым.

Рассмотрим пример определения критической силы для стержня прямоугольного поперечного сечения, показанного на рис. 2.5. Запишем выражения для главных моментов инерции заданного сечения

$$J_y = \frac{h^3 b}{12}; \qquad J_x = \frac{b^3 h}{12}.$$

При потере устойчивости в плоскости zOy изгиб стержня происходит относительно оси x. В указанной плоскости стержень имеет защемление на нижнем конце, а верхний конец закреплен шарнирно, следовательно, коэффициент приведения длины $\mu_x = 0{,}7$. В этом случае имеем следующее выражение для критической силы

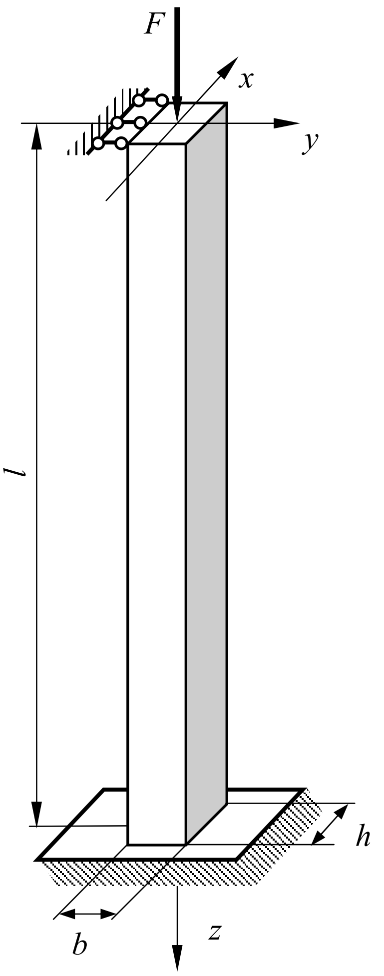


Рис. 2.5. К расчету сжатого стержня

$$F_{cr\,x} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_x}{(\mu_x l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot b^3 \cdot h}{12 \cdot (0{,}7l)^2} = 0{,}170 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot b^3 \cdot h}{(l)^2}.$$

При потере устойчивости в плоскости zOx изгиб стержня происходит относительно оси y. В указанной плоскости стержень имеет защемление на нижнем конце, а верхний конец свободен от закрепления, следовательно, коэффициент приведения длины $\mu_y = 2$. В этом случае имеем следующее выражение для критической силы

$$F_{cr\,y} = \frac{\pi^2 \cdot EJ_y}{(\mu_y l)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot h^3 \cdot b}{12 \cdot (2l)^2} = 0{,}021 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot h^3 \cdot b}{(l)^2}.$$

Наиболее рациональным сечением заданного сжатого стержня будет такое, для которого критические силы в обеих главных плоскостях инерции равны. Тогда имеем

$$0{,}170 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot b^3 \cdot h}{(l)^2} = 0{,}021 \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot h^3 \cdot b}{(l)^2} \quad \text{или}$$

$$0{,}170 \cdot b^2 = 0{,}021 \cdot h^2.$$

Отсюда соотношение между сторонами прямоугольного поперечного сечения должно быть равно

$$\frac{h}{b}=\sqrt{\frac{0{,}170}{0{,}021}}=2{,}845.$$

При соотношении размеров $h/b<2{,}845$ критическая сила $F_{cr\,x}>F_{cr\,y}$ и, следовательно, потеря устойчивости произойдет в плоскости zOx (изгиб стержня происходит относительно оси y). В противном случае, когда $h/b>2{,}845$ критическая сила $F_{cr\,x}<F_{cr\,y}$ и, следовательно, потеря устойчивости произойдет в плоскости zOy (изгиб стержня происходит относительно оси x).

Следует заметить, что в инженерной практике при назначении размеров сжатых стержней принимается во внимание целый ряд соображений конструктивного характера, поэтому условие равноустойчивости стержня в двух плоскостях инерции учитывается по мере возможности.

2.3 ПРЕДЕЛЫ ПРИМЕНИМОСТИ ФОРМУЛЫ ЭЙЛЕРА. ФОРМУЛА ЯСИНСКОГО

При выводе формулы Эйлера использовалась гипотеза о линейно-упругом характере работы материала стержня. Поэтому естественно, что ее нельзя применять в случаях, когда критические напряжения превышают предел пропорциональности $\sigma_{cr}>\sigma_{pr}$. Для установления предела применимости формулы Эйлера найдем

$$\sigma_{cr}=\frac{F_{cr}}{A}=\frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2 A}=\frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu l}{i}\right)^2},$$

где $i=\sqrt{J/A}$ - радиус инерции поперечного сечения стержня.

Обозначим $\lambda=\dfrac{\mu l}{i}$. Величина λ называется гибкостью стержня, следовательно, критические напряжения равны

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Приравнивая критические напряжения пределу пропорциональности, получаем выражение для предельного значения гибкости

$$\lambda_0'=\sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}.$$

Для стержней, обладающих гибкостью $\lambda>\lambda_0'$, величина критической силы должна определяться по формуле Эйлера. Если же $\lambda<\lambda_0'$, то формулой Эйлера пользоваться нельзя. Для низкоуглеродистых сталей $\sigma_{pr} = 200\,\text{МПа}$ и $E = 2{,}0 \cdot 10^5\,\text{МПа}$

$$\lambda_0' = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 99{,}3 \approx 100\,.$$

Если стержень работает за пределами линейно упругих деформаций критическую силу необходимо вычислять по формуле Ясинского. На основе аппроксимации большого числа экспериментальных данных Ф.С. Ясинский предложил следующую эмпирическую формулу для определения критических напряжений:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda\,,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала стержня. Для низкоуглеродистых сталей $a = 310\,\text{МПа}$, $b = 1{,}14\,\text{МПа}$;

λ – расчетная гибкость стержня;

σ_{cr} – критические напряжения.

Необходимо отметить, что при малой гибкости стержня вместо потери устойчивости достигается опасное состояние материала, из которого изготовлен стержень, и формулой Ясинского пользоваться нельзя. В низкоуглеродистых сталях опасное состояние материала соответствует появлению пластических деформаций. Следовательно, формула Ясинского применима, если выполняется следующее условие $\sigma_{cr} < \sigma_y$. Тогда, принимая $\sigma_y = 240\,\text{МПа}$, определим предельное значение гибкости

$$\lambda_0'' = \frac{a - \sigma_y}{b} = \frac{310 - 240}{1{,}14} = 61{,}4\,.$$

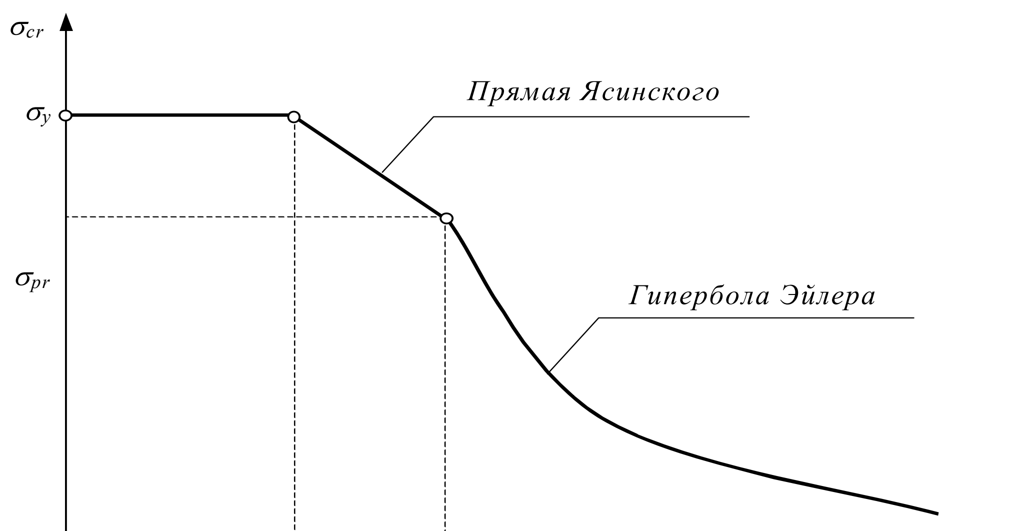


Рис. 2.6. График зависимости критических напряжений от гибкости

Полный график зависимости критических напряжений от гибкости стержня, изготовленного из низкоуглеродистой стали, показан на рис. 2.6

2.4 ПРАКТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

При назначении размеров сжатых стержней необходимо предотвратить потерю ими устойчивости при действии сжимающих сил в течение всего эксплуатационного периода. Поэтому нормальные напряжения в поперечном сечении сжатого стержня обязательно должны быть меньше критических напряжений σ_{cr}

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} < \frac{F_{cr}}{A_{br}} = \sigma_{cr},$$

где N – расчетная сжимающая сила (эксплуатационная нагрузка);

A_{br} – площадь поперечного сечения брутто.

Для обеспечения надежной работы сжатого стержня необходимо обеспечить определенный запас устойчивости, поэтому напряжения в стержне должны быть меньше расчетного сопротивления, которое в свою очередь должно составлять некоторую часть от критического напряжения:

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \le \frac{\sigma_{cr}}{k},$$

где k – коэффициент запаса устойчивости, $k > 1{,}0$.

Сравним полученную формулу с условием прочности короткого стержня при одноосном сжатии

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \le R,$$

где R – расчетное сопротивление материала.

Введем следующее обозначение

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{k \cdot R}, \text{ откуда } \frac{\sigma_{cr}}{k} = \varphi \cdot R.$$

Величина $\varphi \le 1{,}0$ представляет собой коэффициент уменьшения основного расчетного сопротивления при продольном изгибе (коэффициент продольного изгиба). Коэффициент продольного изгиба φ зависит от критических напряжений, и, следовательно, является функцией гибкости стержня

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{k \cdot R} = f(\lambda).$$

Значение коэффициента φ как некоторой функции от гибкости для различных материалов установлены соответствующими «Строительными нормами и правилами» (СНиП) и обычно приводятся в виде таблиц. Таблица коэффициентов φ для сталей, обладающих различными расчетными сопротивлениями по пределу текучести приведены в табл. 2.1.

Таким образом, условие устойчивости сжатого стержня можно записать следующим образом

$$\sigma = \frac{N}{A_{br}} \leq \varphi \cdot R \quad \text{или} \quad \sigma = \frac{N}{\varphi \cdot A_{br}} \leq R\,.$$

Подбор сечения сжатых стержней представляет собой более сложную задачу, чем растянутых. Это объясняется тем, что коэффициент продольного изгиба φ зависит от размеров и формы поперечного сечения и поэтому не может быть назначен заранее. Ввиду этого расчет на устойчивость выполняется методом последовательных приближений (методом итераций).

ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕТОВ ДЛЯ РАСЧЕТОВ С ЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Таблица 2.1

	Значение коэффициентов φ и C для элементов из стали с расчетным сопротивлением R, МПа											
	200		**240**		**280**		**320**		**360**		**400**	
λ	φ	C	φ	C	φ	C	φ	C	φ	C	φ	C
0	1,000	0	1,000	0	1,000	0	1,000	0	1,000	0	1,000	0
10	0,988	$1{,}012\cdot10^2$	0,987	$1{,}013\cdot10^2$	0,985	$1{,}015\cdot10^2$	0,984	$1{,}016\cdot10^2$	0,983	$1{,}017\cdot10^2$	0,982	$1{,}018\cdot10^2$
20	0,967	$4{,}137\cdot10^2$	0,962	$4{,}158\cdot10^2$	0,959	$4{,}171\cdot10^2$	0,955	$4{,}188\cdot10^2$	0,952	$4{,}202\cdot10^2$	0,949	$4{,}215\cdot10^2$
30	0,939	$9{,}585\cdot10^2$	0,931	$9{,}667\cdot10^2$	0,924	$9{,}740\cdot10^2$	0,917	$9{,}815\cdot10^2$	0,911	$9{,}879\cdot10^2$	0,905	$9{,}945\cdot10^2$
40	0,906	$1{,}766\cdot10^3$	0,894	$1{,}790\cdot10^3$	0,833	$1{,}921\cdot10^3$	0,873	$1{,}833\cdot10^3$	0,863	$1{,}854\cdot10^3$	0,854	$1{,}874\cdot10^3$
50	0,869	$2{,}877\cdot10^3$	0,852	$2{,}934\cdot10^3$	0,836	$2{,}990\cdot10^3$	0,822	$3{,}041\cdot10^3$	0,809	$3{,}090\cdot10^3$	0,796	$3{,}141\cdot10^3$
60	0,827	$4{,}353\cdot10^3$	0,805	$4{,}472\cdot10^3$	0,785	$4{,}586\cdot10^3$	0,766	$4{,}700\cdot10^3$	0,749	$4{,}806\cdot10^3$	0,721	$4{,}993\cdot10^3$
70	0,782	$6{,}266\cdot10^3$	0,754	$6{,}499\cdot10^3$	0,724	$6{,}768\cdot10^3$	0,687	$7{,}132\cdot10^3$	0,654	$7{,}492\cdot10^3$	0,623	$7{,}865\cdot10^3$
80	0,734	$8{,}719\cdot10^3$	0,686	$9{,}329\cdot10^3$	0,641	$9{,}984\cdot10^3$	0,602	$1{,}063\cdot10^4$	0,566	$1{,}131\cdot10^4$	0,532	$1{,}203\cdot10^4$
90	0,665	$1{,}218\cdot10^4$	0,612	$1{,}324\cdot10^4$	0,565	$1{,}434\cdot10^4$	0,522	$1{,}552\cdot10^4$	0,483	$1{,}677\cdot10^4$	0,447	$1{,}812\cdot10^4$
100	0,599	$1{,}669\cdot10^4$	0,542	$1{,}845\cdot10^4$	0,493	$2{,}028\cdot10^4$	0,448	$2{,}232\cdot10^4$	0,408	$2{,}451\cdot10^4$	0,369	$2{,}710\cdot10^4$
110	0,537	$2{,}253\cdot10^4$	0,478	$2{,}531\cdot10^4$	0,427	$2{,}834\cdot10^4$	0,381	$3{,}176\cdot10^4$	0,338	$3{,}580\cdot10^4$	0,306	$3{,}954\cdot10^4$
120	0,479	$3{,}006\cdot10^4$	0,419	$3{,}437\cdot10^4$	0,366	$3{,}934\cdot10^4$	0,321	$4{,}486\cdot10^4$	0,287	$5{,}017\cdot10^4$	0,260	$5{,}538\cdot10^4$
130	0,425	$3{,}976\cdot10^4$	0,364	$4{,}643\cdot10^4$	0,313	$5{,}399\cdot10^4$	0,276	$6{,}123\cdot10^4$	0,247	$6{,}842\cdot10^4$	0,223	$7{,}578\cdot10^4$
140	0,376	$5{,}213\cdot10^4$	0,315	$6{,}222\cdot10^4$	0,272	$7{,}206\cdot10^4$	0,240	$8{,}167\cdot10^4$	0,215	$9{,}116\cdot10^4$	0,195	$1{,}005\cdot10^5$
150	0,328	$6{,}860\cdot10^4$	0,276	$8{,}152\cdot10^4$	0,239	$9{,}414\cdot10^4$	0,211	$1{,}066\cdot10^5$	0,189	$1{,}190\cdot10^5$	0,171	$1{,}316\cdot10^5$
160	0,290	$8{,}828\cdot10^4$	0,244	$1{,}049\cdot10^5$	0,212	$1{,}208\cdot10^5$	0,187	$1{,}369\cdot10^5$	0,167	$1{,}533\cdot10^5$	0,152	$1{,}684\cdot10^5$
170	0,259	$1{,}116\cdot10^5$	0,218	$1{,}326\cdot10^5$	0,189	$1{,}529\cdot10^5$	0,167	$1{,}731\cdot10^5$	0,150	$1{,}927\cdot10^5$	0,136	$2{,}125\cdot10^5$
180	0,233	$1{,}391\cdot10^5$	0,196	$1{,}653\cdot10^5$	0,170	$1{,}906\cdot10^5$	0,150	$2{,}160\cdot10^5$	0,135	$2{,}400\cdot10^5$	0,123	$2{,}634\cdot10^5$
190	0,210	$1{,}719\cdot10^5$	0,177	$2{,}040\cdot10^5$	0,154	$2{,}344\cdot10^5$	0,136	$2{,}654\cdot10^5$	0,122	$2{,}959\cdot10^5$	0,111	$3{,}252\cdot10^5$
200	0,191	$2{,}094\cdot10^5$	0,161	$2{,}484\cdot10^5$	0,140	$2{,}857\cdot10^5$	0,124	$3{,}226\cdot10^5$	0,111	$3{,}604\cdot10^5$	0,101	$3{,}960\cdot10^5$
210	0,174	$2{,}534\cdot10^5$	0,147	$3{,}000\cdot10^5$	0,128	$3{,}445\cdot10^5$	0,113	$3{,}903\cdot10^5$	0,102	$4{,}324\cdot10^5$	0,093	$4{,}742\cdot10^5$
220	0,160	$3{,}025\cdot10^5$	0,135	$3{,}585\cdot10^5$	0,118	$4{,}102\cdot10^5$	0,104	$4{,}654\cdot10^5$	0,094	$5{,}149\cdot10^5$	0,086	$5{,}628\cdot10^5$

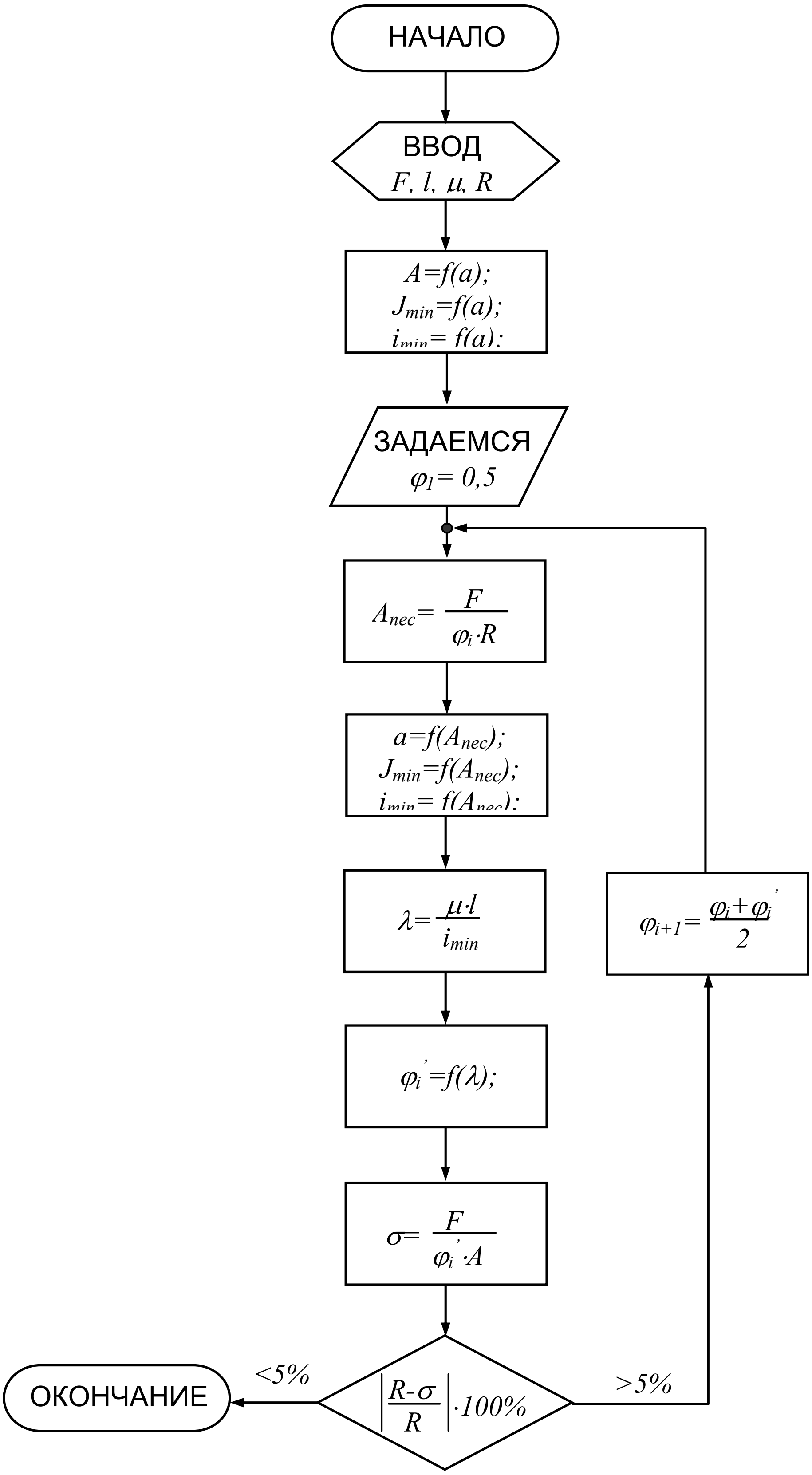


Рис. 2.7. Блок-схема расчета сжатого стержня на устойчивость методом последовательных приближений

Вначале задаются значением $\varphi = 0{,}5 - 0{,}6$ и определяют требуемую площадь поперечного сечения

$$A_{nec} \geq \frac{N}{\varphi \cdot R}.$$

Для этого сечения находят момент инерции $J_{\min}$, минимальный радиус инерции $i_{\min}$ и гибкость стержня

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}}.$$

Используя найденное значение гибкости, по табл. 2.1 определяют новую величину коэффициента φ и вычисляют расчетные напряжения

$$\sigma = \frac{N}{\varphi \cdot A_{nec}} \leq R.$$

Процесс последовательных приближений (итерационный процесс) продолжается до тех пор, пока разница между величиной расчетных напряжений и расчетным сопротивлением материала не будет меньше величины, установленной СНиПом. Обычно требуется, чтобы разница между двумя указанными величинами не превышала 3 – 5%.

Расчет сжатых стержней на устойчивость методом последовательных приближений наглядно может быть представлен в виде следующей блок-схемы (рис. 2.7).

2.5 БЕЗЫТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

Предлагаемый способ облегчает и ускоряет проектировочный расчет на устойчивость при центральном сжатии, если задачей проектирования является определение размеров сечения, геометрически подобного исходному (все размеры такого сечения определяются через некоторый параметр a).

По известной методике расчета [1,2], задавшись вначале произвольным значением коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения φ, находят необходимое значение этого коэффициента φ_{nec} последовательными приближениями. Однако значение φ_{nec} можно определить без итераций. Для этого рассмотрим вначале указанный метод расчета. В нем используют зависимость коэффициента φ от гибкости стержня λ, обычно в виде таблиц или графиков:

$$\varphi = \varphi(\lambda) \qquad (1)$$

Очевидно, окончательное значение φ_k также должно подчиняться этой же зависимости, т.е. должно выполняться соотношение

$$\varphi_{nec} = \varphi(\lambda_{nec}) \tag{2}$$

где λ_{nec} – необходимая гибкость стержня.

Как известно, задавшись некоторым значением коэффициента φ, вначале определяют требуемую площадь поперечного сечения стержня

$$A_{nec} = \frac{F}{\varphi \cdot R} \tag{3}$$

где F – продольное усилие;

R – расчетное сопротивление материала стержня.

Далее, выполняя несложные алгебраические преобразования, выражаем требуемую гибкость стержня следующим образом:

$$\lambda_{nec} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{A_{nec}}{A_{nec}} \cdot \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{A_{nec} \cdot \mu \cdot l}{A_{nec} \cdot \sqrt{\dfrac{J_{\min}}{A_{nec}}}} = \frac{A_{nec} \cdot \mu \cdot l}{\sqrt{A_{nec} \cdot J_{\min}}} = \frac{A_{nec} \cdot \mu \cdot l}{\sqrt{\dfrac{F \cdot J_{\min}}{\varphi \cdot R}}};$$

$$\lambda_{nec} = A_{nec} \cdot \mu \cdot l \cdot \sqrt{\frac{\varphi \cdot R}{F \cdot J_{\min}}} = C \cdot \sqrt{\varphi} \tag{4}$$

где l – длина стержня;

μ – коэффициент приведения длины;

$J_{\min}$ – минимальный осевой момент инерции сечения;

$i_{\min}$ – минимальный радиус инерции поперечного сечения;

C – некоторый параметр сжатого стержня, который можно представить в следующем виде:

$$C = \frac{(A_{nec})^2}{J_{\min}} \cdot \frac{(\mu \cdot l)^2 \cdot R}{F}. \tag{5}$$

Следует подчеркнуть, что величина C является некоторой константой в процессе решения данной задачи, так как отношение $(A_{nec})^2 / J_{\min}$ есть безразмерная постоянная, не зависящая от характерного размера a определяющего размеры поперечного сечения стержня сечения. Указанное соотношение $(A_{nec})^2 / J_{\min}$ сокращается, если вычисления производится в общем виде. Остальные величины фиксированы по условию задачи.

Зависимость (4) целесообразно представить в виде

$$\varphi_{nec} = \frac{\lambda_{nec}^2}{C}. \tag{6}$$

Очевидно, что решением данной задачи являются такие числа φ_{nec} и λ_{ntc}, которые одновременно удовлетворяют уравнению (6) и зависимости (2), характерной для данного материала. Известный способ является, по существу, итерационным способом решения системы двух нелинейных уравнений –

(2) и (6). Легко получить графическое решение этой системы пересечением соответствующих кривых.

Однако эту систему можно решить эффективнее. Для этого достаточно таблицу $\varphi(\lambda)$ материала дополнить колонкой $C = \varphi_{nec} / \lambda_{nec}^2$, в которой значения C вычисляют по табличным значениям φ и λ соответствующей строки. После этого предлагаемый способ расчета заключается в следующем:

1. Для заданной расчетной схемы стержня и нагрузки определяют C по формуле (5) .
2. По таблице $\lambda - \varphi - C$, используя колонку C, как входную, определяют окончательное значение φ_k (при необходимости применяют, как обычно, линейную интерполяцию). Найденное значение φ_k является окончательным, так как оно, совместно с соответствующей величиной λ_k и удовлетворяет обоим уравнениям системы (2) и (5). На практике предпочтительнее пользоваться графиком $\varphi - \lg C$, который нетрудно построить для данного материала, используя известные таблицы $\varphi(\lambda)$.

3, По найденному значению φ_k определяют размеры спроектированного сечения обычным способом и производят, при необходимости, проверку.

Таким образом, предлагаемый способ, не изменяя сущности и окончательных результатов известного способа проектировочного расчета на устойчивость при центральном сжатии, однако существенно сокращает затраты времени на проведение вычислений.

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

3.1 РАСЧЕТ СЕЧЕНИЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

3.1.1 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Стальная стойка длиной $l = 3{,}30$ метра сжимается силой $F = 1000$ кН (см. рис. 1). Материал стойки − листовая сталь марки ВСт3кп2. Расчетное сопротивление стали ВСт3кп2 принять равным $R = 200$ МПа, предел текучести $\sigma_y = 210$ МПа, предел пропорциональности $\sigma_{pr} = 200$ МПа. Требуется:

а) используя метод последовательных приближений, найти размеры поперечного сечения заданного стержня (первоначальное значение коэффициента продольного изгиба $\varphi = 0{,}5$);

б) вычислить значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости для найденных размеров поперечного сечения;

в) используя безытерационный метод расчета, подобрать размеры поперечного сечения заданного стержня и найти величину критической силы;
г) определить, как изменится площадь поперечного сечения и критическая сила рассматриваемой стойки при увеличении ее длины в полтора раза (расчет выполнять безытерационным методом).

Пункты в) и г) выполняются студентами по желанию в рамках УИРС.

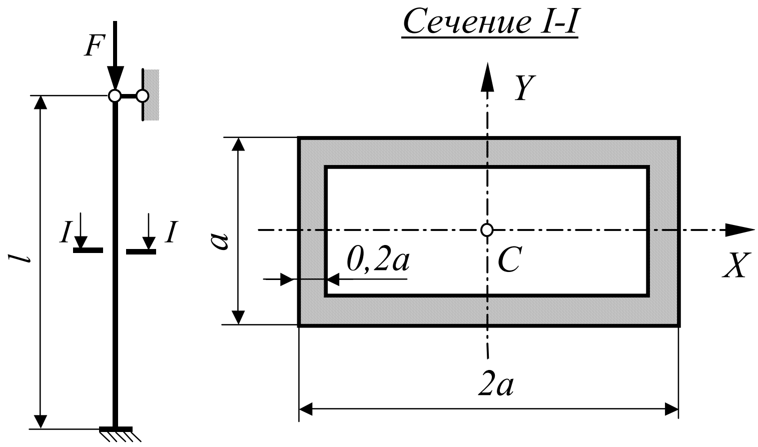


Рис. 3.1. Расчетная схема сжатой стойки

3.1.2 ПОДБОР СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Вычисляем геометрические характеристики заданного поперечного сечения сжатого стержня. Сечение разбиваем на два элемента: первый элемент – прямоугольник с размерами $2a \times a$; второй элемент – вырезанный прямоунгольник с размерами $1{,}6a \times 0{,}6a$.

Суммарная площадь составного сечения равна:

$$A = A_1 - A_2 = 2a \cdot a - 0{,}6a \cdot 1{,}6a = 1{,}04a^2 .$$

Находим минимальный осевой момент инерции заданного поперечного сечения стержня:

$$J_{\min} = J_X = J_{x1} - J_{x2} = \frac{a^3 \cdot 2a}{12} - \frac{(0{,}6a)^3 \cdot 1{,}6a}{12} = 0{,}1379a^4 .$$

Определяем величину минимального радиуса инерции сечения:

$$i_{\min} = i_X = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{0{,}1379a^4}{1{,}04a^2}} = 0{,}364a .$$

Находим размеры поперечного сечения сжатой стойки методом последовательных приближений.

Первое приближение. Запишем условие устойчивости центрально сжатого стержня:

$$\sigma = \frac{F}{A} \le \varphi \cdot R,$$

где φ – коэффициент продольного изгиба.

Принимаем $\varphi_1 = 0{,}5$. Тогда требуемая площадь поперечного сечения стойки равна

$$A_{ntc} = \frac{F}{\varphi \cdot R} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 200 \cdot 10^6} = 100 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 100\ \text{см}^2.$$

Учитывая ранее полученные выражения для величин A и i_{min}, имеем:

$$a = \sqrt{\frac{A}{1{,}04}} = \sqrt{\frac{100}{1{,}04}} = 9{,}81\ \text{см}; \quad i_{\min} = 0{,}364 \cdot 9{,}81 = 3{,}57\ \text{см}.$$

Вычисляем гибкость стержня по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7 \cdot 330}{3{,}57} = 64{,}71$$

где $\mu = 0{,}7$ – коэффициент приведенной длины, выбираемый в зависимости от условий закрепления концов стержня.

Табличное значение коэффициента продольного изгиба для стойки из стали марки ВСт3кп2 при $R = 200$ МПа и гибкости стержня $\lambda = 64{,}71$ находится линейной интерполяцией по табл. 2.1

$$\varphi_1' = 0{,}827 - \frac{0{,}827 - 0{,}782}{10} \cdot (64{,}71 - 60) = 0{,}806.$$

Так как полученное значение $\varphi_1' = 0{,}806$ значительно отличается от ранее принятого $\varphi_1 = 0{,}5$, то необходимо выполнить расчет на устойчивость при новом значении коэффициента продольного изгиба.

Второе приближение. Задаемся новым значением коэффициента продольного изгиба: $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}806}{2} = 0{,}653$.

$$A_{nec} = \frac{F}{\varphi \cdot R} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0{,}653 \cdot 200 \cdot 10^6} = 76{,}57 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 76{,}57\ \text{см}^2.$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{1{,}04}} = \sqrt{\frac{76{,}57}{1{,}04}} = 8{,}58\ \text{см}; \qquad i_{\min} = 0{,}364 \cdot 8{,}58 = 3{,}12\ \text{см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7 \cdot 330}{3{,}12} = 74{,}04.$$

$$\varphi_2' = 0{,}782 - \frac{0{,}782 - 0{,}734}{10} \cdot (74{,}04 - 70) = 0{,}763.$$

Третье приближение: $\varphi_3 = \dfrac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \dfrac{0,653 + 0,763}{2} = 0,708$.

$$A_{ntc} = \frac{F}{\varphi \cdot R} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,708 \cdot 200 \cdot 10^6} = 70,62 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 70,62\ \text{см}^2.$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{1,04}} = \sqrt{\frac{70,62}{1,04}} = 8,24\ \text{см}, \quad i_{\min} = 0,364 \cdot 8,24 = 3,00\ \text{см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 330}{3,00} = 77,01.$$

$$\varphi_3' = 0,782 - \frac{0,782 - 0,734}{10} \cdot (77,01 - 70) = 0,748.$$

Находим величину расчетных напряжений в поперечном сечении сжатой стойки:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,748 \cdot 70,62 \cdot 10^{-4}} = 189,31\ \text{МПа} < R = 200\ \text{МПа}.$$

Недогрузка сечения составляет: $\dfrac{200 - 189,31}{160} \cdot 100\% = 5,35\% > 5\%$, следовательно, необходимо выполнить еще одно приближение.

Четвертое приближение: $\varphi_4 = \dfrac{\varphi_3 + \varphi_3'}{2} = \dfrac{0,708 + 0,748}{2} = 0,728$.

$$A_{nec} = \frac{F}{\varphi \cdot R} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,728 \cdot 200 \cdot 10^6} = 68,68 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 68,68\ \text{см}^2.$$

$$a = \sqrt{\frac{A}{1,04}} = \sqrt{\frac{68,68}{1,04}} = 8,13\ \text{см}, \quad i_{\min} = 0,364 \cdot 8,13 = 2,96\ \text{см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 330}{2.96} = 78,06.$$

$$\varphi_4' = 0,782 - \frac{0,782 - 0,734}{10} \cdot (78,06 - 70) = 0,743.$$

Находим величину расчетных напряжений в поперечном сечении сжатой стойки:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0,743 \cdot 68,68 \cdot 10^{-4}} = 195,97\ \text{МПа} < R = 200\ \text{МПа}.$$

Недогрузка составляет: $\dfrac{200 - 195,97}{200} \cdot 100\% = 2,02\% < 5\%$, что допустимо.

Окончательно принимаем следующие размеры поперечного сечения заданного стержня $a = 8,13$ см и $A = 68,68\ \text{см}^2$.

3.1.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Вычисляем значение критической силы. Определяем граничное значение гибкости стержня, при котором можно использовать формулу Эйлера. Указанная формула была выведена, исходя из предположения о линейно-упругом характере работы материала сжатого стержня, и записывается в следующем виде

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Следовательно, максимальные сжимающие напряжения не должны превышать предела пропорциональности материала. Находим граничное значение гибкости при условии, что $\sigma_{pr} = 200$ МПа и $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа

$$\lambda_0' = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 99{,}3.$$

Расчетная гибкость стержня $\lambda = 78{,}06 < \lambda_0' = 99{,}3$, то при определении критической силы необходимо пользоваться формулой Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda,$$

где a и b – коэффициенты, зависящие от материала стержня. Для низкоуглеродистых сталей $a = 310$ МПа, $b = 1{,}14$ МПа;

λ – расчетная гибкость стержня;

σ_{cr} – критические напряжения.

Следует помнить, что формулу Ясинского можно применять в том случае, если величина критических напряжений σ_{cr} не превышает предел текучести материала σ_y. Тогда

$$\sigma_{cr} = (310 - 1{,}14 \cdot 78{,}06) \cdot 10^6 = 221{,}01 \text{ МПа} < \sigma_y = 240 \text{ МПа}.$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 221{,}01 \cdot 10^6 \cdot 78{,}06 \cdot 10^{-4} = 1725{,}22 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1725{,}22 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости равен:

$$k = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{1725{,}22}{1000} = 1{,}725.$$

3.1.4 ПОДБОР СЕЧЕНИЯ БЕЗЫТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Для заданной расчетной схемы стержня и нагрузки определяем параметр C по формуле

$$C=\frac{A^2}{J_{\min}}\cdot\frac{(\mu\cdot l)^2\cdot R}{F}=\frac{(1{,}04a^2)^2}{0{,}1379a^4}\cdot\frac{(0{,}7\cdot 3{,}30)^2\cdot 200\cdot 10^6}{1000\cdot 10^3}=$$

$$=7{,}843\cdot 1067{,}22=8370{,}2=8{,}370\cdot 10^3\,.$$

По таблице $\lambda-\varphi-C$, используя колонку C, как входную, определяем требуемые значения коэффициента продольного изгиба φ_{nec} и гибкости стержня λ_{nec}. Вычисление указанных величин выполняем с помощью линейной интерполяции.

$$\varphi_{nec}=0{,}782-\frac{(8{,}370-6{,}266)\cdot 10^3}{(8{,}719-6{,}266)\cdot 10^3}\cdot(0{,}782-0{,}734)=0{,}741$$

$$\lambda_{nec}=70+\frac{(8{,}370-6{,}266)\cdot 10^3}{(8{,}719-6{,}266)\cdot 10^3}\cdot(80-70)=78{,}58\,.$$

Найденные значения φ_{nec} и λ_{nec} являются окончательным, так как удовлетворяют условию устойчивости стержня. Далее вычисляем:

$$i_{\min}=\frac{\mu\cdot l}{\lambda_{nec}}=\frac{0{,}7\cdot 330}{78{,}58}=2{,}94\text{ см},\qquad a=\frac{i_{\min}}{0{,}364}=\frac{2{,}94}{0{,}364}=8{,}08\text{ см}.$$

$$A=1{,}04a^2=1{,}04\cdot 8{,}08^2=67{,}90\text{ см}^2.$$

По сравнению с расчетом методом последовательных приближений площадь поперечного сечения стержня уменьшилась на $\dfrac{68{,}68-67{,}90}{67{,}90}\cdot 100\%=1{,}15\%$.

Определяем величину расчетных напряжений в поперечном сечении заданного сжатого стержня:

$$\sigma=\frac{F}{\varphi\cdot A}=\frac{1000\cdot 10^3}{0{,}741\cdot 67{,}90\cdot 10^{-4}}=198{,}75\text{ МПа}<R=200\text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет: $\dfrac{200-198{,}75}{200}\cdot 100\%=0{,}62\%<5\%$, что значительно меньше, чем при расчете методом последовательных приближений. Таким образом, безытерационный метод, не изменяя сущности и окончательных результатов известного метода проектировочного расчета на устойчивость, но существенно уменьшает трудоемкость вычислений.

Находим значение критической силы при заданной длине стержня. Расчетная гибкость стойки $\lambda=78{,}06<\lambda_0'=99{,}30$, следовательно, при определении критической силы необходимо использовать формулу Ясинского:

$$\sigma_{cr}=a-b\lambda=(310-1{,}14\cdot 78{,}58)\cdot 10^6=220{,}42\text{ МПа}<\sigma_y=240\text{ МПа}.$$

$$F_{cr}=\sigma_{cr}\cdot A=220{,}42\cdot 10^6\cdot 78{,}58\cdot 10^{-4}=1732{,}05\cdot 10^3\text{ Н}=1732{,}05\text{ кН}.$$

Определяем требуемые размеры поперечного сечения стойки при увеличении ее длины в 1,5 раза: $l = 3{,}30 \cdot 1{,}5 = 4{,}95$ м. Находим параметр C по формуле

$$C = \frac{A^2}{J_{\min}} \cdot \frac{(\mu \cdot l)^2 \cdot R}{F} = \frac{\left(1{,}04a^2\right)^2}{0{,}1379a^4} \cdot \frac{(0{,}7 \cdot 4{,}95)^2 \cdot 200 \cdot 10^6}{1000 \cdot 10^3} =$$

$$= 7{,}843 \cdot 2401{,}25 = 18832{,}96 = 18{,}833 \cdot 10^3 .$$

Находим требуемые значения коэффициента продольного изгиба φ_{nec} и гибкости стержня λ_{nec}

$$\varphi_{nec} = 0{,}599 - \frac{(18{,}833 - 16{,}690) \cdot 10^3}{(22{,}530 - 16{,}690) \cdot 10^3} \cdot (0{,}599 - 0{,}537) = 0{,}576 ;$$

$$\lambda_{nec} = 100 + \frac{(18{,}833 - 16{,}690) \cdot 10^3}{(22{,}530 - 16{,}690) \cdot 10^3} \cdot (110 - 100) = 103{,}67 .$$

Далее вычисляем

$$i_{\min} = \frac{\mu \cdot l}{\lambda_{nec}} = \frac{0{,}7 \cdot 495}{103{,}67} = 3{,}34 \text{ см}, \qquad a = \frac{i_{\min}}{0{,}364} = \frac{3{,}34}{0{,}364} = 9{,}18 \text{ см}.$$

$$A = 1{,}04a^2 = 1{,}04 \cdot 9{,}18^2 = 87{,}64 \text{ см}^2.$$

Определяем величину расчетных напряжений в сечении стержня:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{1000 \cdot 10^3}{0{,}576 \cdot 87{,}64 \cdot 10^{-4}} = 198{,}09 \text{ МПа} < R = 200 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет: $\dfrac{200 - 198{,}09}{200} \cdot 100\% = 0{,}96\% < 5\%$, что значительно меньше, чем в ранее выполненном инженерном расчете на устойчивость заданного стержня.

Находим значение критической силы. Расчетная гибкость стержня $\lambda = 103{,}67 > \lambda_0' = 99{,}30$, следовательно, при определении критической силы необходимо пользоваться формулой Эйлера:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \cdot A = \frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{11}}{103{,}67^2} \cdot 87{,}64 \cdot 10^{-4} = 1608{,}0 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1608 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости равен:

$$k = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{1608{,}0}{1000} = 1{,}608 .$$

3.2 РАСЧЕТ СЕЧЕНИЯ, СОСТАВЛЕННОГО ИЗ ПРОКАТНЫХ

ПРОФИЛЕЙ

3.2.1 ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Стальная стойка длиной $l = 9{,}0$ метров сжимается силой $F = 2000\,кН$ (см. рис. 1). Материал стойки − фасонная сталь марки 18пс. Расчетное сопротивление стали 18пс принять равным $R = 240$ МПа, предел текучести материала $\sigma_y = 245\,МПа$, предел пропорциональности − $\sigma_{pr} = 200\,МПа$

Требуется:

а) используя метод последовательных приближений, найти размеры поперечного сечения заданного стержня (первоначальное значение коэффициента продольного изгиба $\varphi = 0{,}5$);

б) вычислить значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости для найденных размеров поперечного сечения;

в) построить графики изменения критической силы и допускаемой нагрузки для стойки заданного поперечного сечения, при изменении ее длины;

г) построить график изменения коэффициента запаса устойчивости при изменении ее длины стойки.

Пункты в) и г) выполняются студентами по желанию в рамках УИРС.

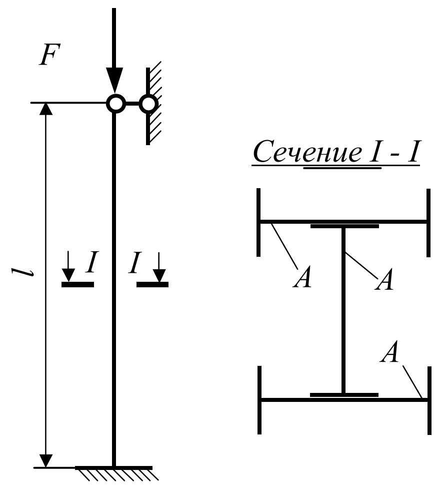


Рис. 3.2. Расчетная схема стойки

3.2.2 ПОДБОР СЕЧЕНИЯ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Условие устойчивости сжатого стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi \cdot A} \le R = 240\,МПа.$$

Задаемся начальным приближением коэффициента продольного изгиба $\varphi_1 = 0{,}5$. Тогда из условия устойчивости определяем требуемую площадь поперечного сечения стержня:

$$A_{нес} \geq \frac{F}{\varphi \cdot R} = \frac{200 \cdot 10^3}{0{,}5 \cdot 240 \cdot 10^6} = 166{,}67 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 166{,}67\ \text{см}^2.$$

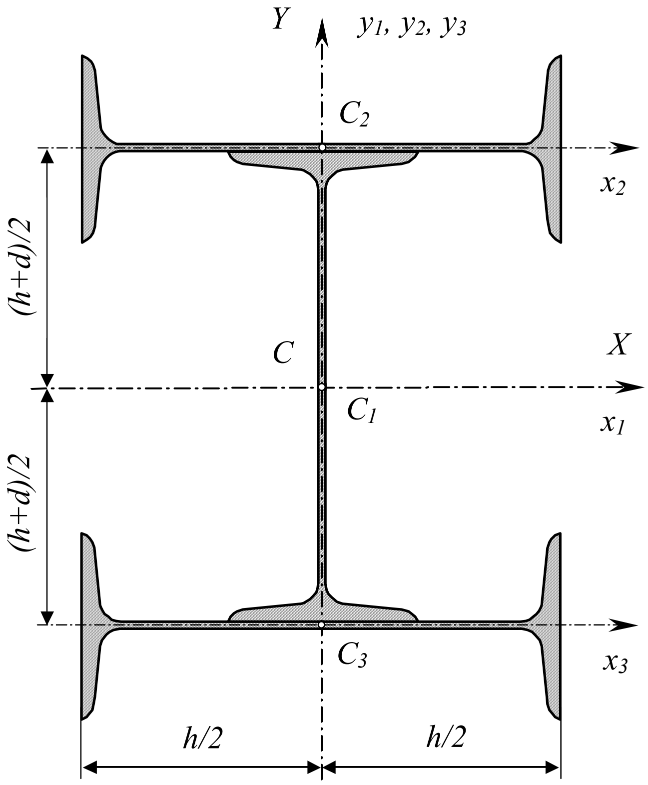


Рис. 3.3. Составное сечение стержня

Требуемая площадь сечения одного двутавра равна:

$$A_{нес}^{дв} = \frac{A_{нес}}{3} = \frac{166{,}67}{3} = 55{,}56\ \text{см}^2.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр №33, имеющий следующие геометрические характеристики: $A^{дв} = 53{,}8\,\text{см}^2$; $h = 330\,\text{мм}$; $b = 140\,\text{мм}$; $t = 11{,}2\,\text{мм}$; $d = 7{,}0\,\text{мм}$; $J_x = 9840\,\text{см}^4$; $J_y = 419\,\text{см}^4$.

Заданное сечение сжатой стойки имеет две оси симметрии X и Y, следовательно, центр тяжести составного сечения находится в точке пересечения указанных осей. Оси X и Y являются главными центральными осями инерции составного сечения сжатого стержня. Находим геометрические характеристики заданного поперечного сечения:

– площадь составного сечения:

$$A = 3A_{дв} = 3 \cdot 53{,}8 = 161{,}4\ \text{см}^2;$$

– моменты инерции сечения:

$$J_Y = J_y + 2\cdot J_x = 419 + 2\cdot 9840 = 20099\ \text{см}^4;$$

$$J_X = J_x + 2\left[A\cdot\left(\frac{h+d}{2}\right)^2 + J_y\right] = 9840 + 2\cdot\left[53{,}8\cdot\left(\frac{33+0{,}70}{2}\right)^2 + 419\right] = 41228{,}1\ \text{см}^4;$$

$$i_X = \sqrt{\frac{J_X}{A}} = \sqrt{\frac{41228{,}1}{161{,}4}} = 15{,}98\ \text{см}; \qquad i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{A}} = \sqrt{\frac{20099}{161{,}4}} = 11{,}16\ \text{см}.$$

Минимальный радиус инерции поперечного сечения сжатого стержня равен $i_{\min} = i_Y = 11{,}16$ см. Дальнейший расчет будем выполнять только относительно оси Y, так как независимо от изменения размеров прокатных двутавров минимальный радиус инерции составного сечения возникает относительно ранее указанной оси.

Вычисляем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu\cdot l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7\cdot 900}{11{,}16} = 56{,}45.$$

По таблице $\varphi \sim \lambda$ с помощью линейной интерполяции находим значение коэффициента продольного изгиба соответствующее вычисленному значению гибкости

$$\varphi_1' = 0{,}852 - \frac{0{,}852 - 0{,}805}{10}\cdot(56{,}45 - 50) = 0{,}822.$$

Полученное значение коэффициента φ значительно отличается от ранее принятого, следовательно, необходимо выполнить следующее приближение.

Второе приближение. Задаемся новым значением коэффициента φ:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = \frac{0{,}5 + 0{,}822}{2} = 0{,}661.$$

$$A_{пес} \ge \frac{F}{\varphi\cdot R} = \frac{2000\cdot 10^3}{0{,}661\cdot 240\cdot 10^6} = 126{,}07\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 126{,}07\ \text{см}^2.$$

$$A_{пес}^{дв} = \frac{A_{пес}}{3} = \frac{126{,}07}{3} = 42{,}02\ \text{см}^2.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр №27, имеющий следующие геометрические характеристики: $A^{дв} = 40{,}2\ \text{см}^2$; $h = 270$ мм; $b = 125$ мм; $t = 9{,}8$ мм; $d = 6{,}0$ мм; $J_x = 5010\ \text{см}^4$; $J_y = 260\ \text{см}^4$.

$$A = 3A^{дв} = 3\cdot 40{,}2 = 120{,}6\ \text{см}^2.$$

$$J_Y = J_y + 2\cdot J_x = 260 + 2\cdot 5010 = 10280\ \text{см}^4;\ i_{min} = i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{A}} = \sqrt{\frac{10280}{120{,}6}} = 9{,}23\ \text{см}.$$

Вычисляем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7 \cdot 900}{9{,}23} = 68{,}26 .$$

По таблице $\varphi \sim \lambda$ с помощью линейной интерполяции находим значение коэффициента продольного изгиба соответствующее вычисленному значению гибкости

$$\varphi_2' = 0{,}805 - \frac{0{,}805 - 0{,}754}{10} \cdot \left(68{,}26 - 60\right) = 0{,}763 .$$

Третье приближение. Задаемся новым значением коэффициента φ:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} = \frac{0{,}661 + 0{,}763}{2} = 0{,}712 .$$

$$A_{нес} \geq \frac{F}{\varphi \cdot R} = \frac{2000 \cdot 10^3}{0{,}712 \cdot 240 \cdot 10^6} = 117{,}04 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2 = 117{,}04\ \text{см}^2.$$

$$A_{нес}^{дв} = \frac{A_{нес}}{3} = \frac{117{,}04}{3} = 39{,}01\ \text{см}^2.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр №24, имеющий следующие геометрические характеристики: $A^{дв} = 34{,}8\,\text{см}^2$; $h = 240\,\text{мм}$; $b = 115\,\text{мм}$; $t = 9{,}5\,\text{мм}$; $d = 5{,}6\,\text{мм}$; $J_x = 3460\,\text{см}^4$; $J_y = 198\,\text{см}^4$.

$$A = 3A^{дв} = 3 \cdot 34{,}8 = 104{,}4\ \text{см}^2.$$

$$J_Y = J_y + 2 \cdot J_x = 198 + 2 \cdot 3460 = 7118\,\text{см}^4;\ i_{min} = i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{A}} = \sqrt{\frac{7118}{104{,}4}} = 8{,}26\,\text{см}.$$

Вычисляем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7 \cdot 900}{8{,}26} = 76{,}27 .$$

$$\varphi_3' = 0{,}754 - \frac{0{,}754 - 0{,}686}{10} \cdot \left(76{,}27 - 70\right) = 0{,}711 .$$

Находим значение расчетных напряжений в сечении сжатого стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{2000 \cdot 10^3}{0{,}711 \cdot 104{,}4 \cdot 10^{-4}} = 269{,}44\,\text{МПа} > R = 240\ \text{МПа}.$$

Перегрузка сечения составляет: $\dfrac{269{,}44 - 240}{240} \cdot 100\% = 12{,}27\% > 5\%$, следовательно, необходимо увеличить размеры поперечного сечения.

Задаемся значением коэффициента $\varphi_4 = 0{,}712$. По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавр №24а, имеющий следующие геометрические характеристики: $A^{дв} = 37{,}5\,см^2$; $h = 240$ мм; $b = 125$ мм; $t = 9{,}8$ мм; $d = 5{,}6$ мм; $J_x = 3800\,см^4$; $J_y = 260\,см^4$.

$$A = 3A^{дв} = 3 \cdot 37{,}5 = 112{,}5 \text{ см}^2.$$

$$J_Y = J_y + 2 \cdot J_x = 260 + 2 \cdot 5010 = 7860\,\text{см}^4;\ i_{\min} = i_Y = \sqrt{\frac{J_Y}{A}} = \sqrt{\frac{7860}{112{,}5}} = 8{,}36\,\text{см}.$$

Вычисляем гибкость стержня:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0{,}7 \cdot 900}{8{,}36} = 75{,}37.$$

По таблице $\varphi \sim \lambda$ с помощью линейной интерполяции находим значение коэффициента продольного изгиба соответствующее вычисленному значению гибкости

$$\varphi_4' = 0{,}754 - \frac{0{,}754 - 0{,}686}{10} \cdot \left(75{,}37 - 70\right) = 0{,}717.$$

Находим значение расчетных напряжений в сечении сжатого стержня:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{\varphi \cdot A} = \frac{2000 \cdot 10^3}{0{,}717 \cdot 112{,}5 \cdot 10^{-4}} = 247{,}95\,\text{МПа} > R = 240\ \text{МПа}.$$

Перегрузка сечения составляет: $\dfrac{247{,}95 - 240}{240} \cdot 100\% = 3{,}31\% < 5\%$, что допустимо. Окончательно принимаем поперечное сечение стержня составленное из трех двутавров №24а.

Следует заметить, что во многих случаях уровень расчетных напряжений в сечении, составленном из прокатных профилей, для двух смежных строк сортамента может отличаться от расчетного сопротивления материала более чем на 5 %. Тогда, ввиду дискретности изменения геометрических характеристик прокатных профилей, дальнейшая оптимизация сечения невозможна. Окончательно принимают такое сечение, в котором уровень нормальных напряжений наименее отклоняется от величины расчетного сопротивления материала.

3.2.3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ

Находим граничное значение гибкости при условии, что $\sigma_{pr} = 200$ МПа и $E = 2{,}0 \cdot 10^5$ МПа

$$\lambda_0' = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 99{,}3.$$

Расчетная гибкость стойки $\lambda = 75{,}37 < \lambda_0' = 99{,}30$, следовательно, при определении критической силы необходимо использовать формулу Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda = (310 - 1{,}14 \cdot 75{,}37) \cdot 10^6 = 224{,}08\,\text{МПа} < \sigma_y = 240\,\text{МПа}.$$

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 224{,}08 \cdot 10^6 \cdot 112{,}5 \cdot 10^{-4} = 2520{,}88\,\text{кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости равен:

$$k = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{2520{,}88}{2000} = 1{,}26.$$

3.2.4 ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ КРИТИЧЕСКОЙ СИЛЫ, ДОПУСКАЕМОЙ НАГРУЗКИ И КОЭФФИЦИЕНТА ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ

Для стоек большой гибкости критические напряжения определяются по формуле Эйлера

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}.$$

Определяем предельную гибкость при следующих исходных данных: $\sigma_{pr} = 200\,\text{МПа}$; $E = 2{,}06 \cdot 10^5\,\text{МПа}$

$$\lambda_0' = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{11}}{200 \cdot 10^6}} = 99{,}30.$$

Полученному значению предельной гибкости соответствует длина стойки

$$l = \frac{\lambda \cdot i_{\min}}{\mu} = \frac{99{,}30 \cdot 8{,}36}{0{,}7} = 1186\ \text{см} = 11{,}86\ \text{м}.$$

Величина критической силы равна

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 200 \cdot 10^6 \cdot 112{,}5 \cdot 10^{-4} = 2250\,\text{кН}.$$

При гибкости стойки, превышающей предельное значение $\lambda_0' = 99{,}30$, задаемся табличными значениями λ (табл. 2.1) и вычисляем величину критических напряжений по формуле Эйлера. Далее находим соответствующие значение критической силы и длины стойки. Все вычисления удобнее выполнять в табличном виде (табл. 3.1).

Для стоек средней гибкости критические напряжения определяются по формуле Ясинского:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda.$$

Определяем предельную гибкость стойки при $\sigma_y = 245\,\text{МПа}$

$$\lambda_0'' = \frac{a - \sigma_y}{b} = \frac{310 - 245}{1{,}14} = 57{,}02.$$

РАСЧЕТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЖАТОЙ СТОЙКИ

Таблица 3.1

λ	φ	F_{cr}, (кН)	$[F]$, (кН)	l_c, (м)	k
0	1,000	2756,25	2700	0,00	1,021
10	0,987	2756,25	2664,9	1,19	1,034
20	0,962	2756,25	2597,4	2,39	1,061
30	0,931	2756,25	2513,7	3,58	1,096
40	0,894	2756,25	2413,8	4,78	1,142
50	0,852	2756,25	2300,4	5,97	1,198
57,02	0,819	2756,22	2211,3	6,81	1,246
60	0,805	2718,00	2173,5	7,17	1,251
70	0,754	2589,75	2035,8	8,36	1,272
80	0,686	2461,50	1852,2	9,55	1,329
90	0,612	2333,25	1652,4	10,75	1,412
99,30	0,547	2213,98	1476,9	11,86	1,499
110	0,478	1833,40	1290,6	13,14	1,421
120	0,419	1540,56	1131,3	14,33	1,362
130	0,364	1312,67	982,8	15,53	1,336
140	0,315	1131,84	850,5	16,72	1,331
150	0,276	985,96	745,2	17,91	1,323
160	0,244	866,57	658,8	19,11	1,315
170	0,218	767,62	588,6	20,30	1,304
180	0,196	684,69	529,2	21,50	1,294
190	0,177	614,52	477,9	22,69	1,286
200	0,161	554,60	434,7	23,89	1,276
210	0,147	503,04	396,9	25,08	1,267
220	0,135	458,35	364,5	26,27	1,257

Полученному значению предельной гибкости соответствует длина стойки

$$l_0 = \frac{\lambda_0'' \cdot i_{\min}}{\mu} = \frac{57{,}02 \cdot 8{,}36}{0{,}7} = 681\,\text{см} = 6{,}81 \text{ м.}$$

Величина критической силы равна

$$F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = 245 \cdot 10^{6} \cdot 112{,}5 \cdot 10^{-4} = 2756{,}25\,\text{кН}.$$

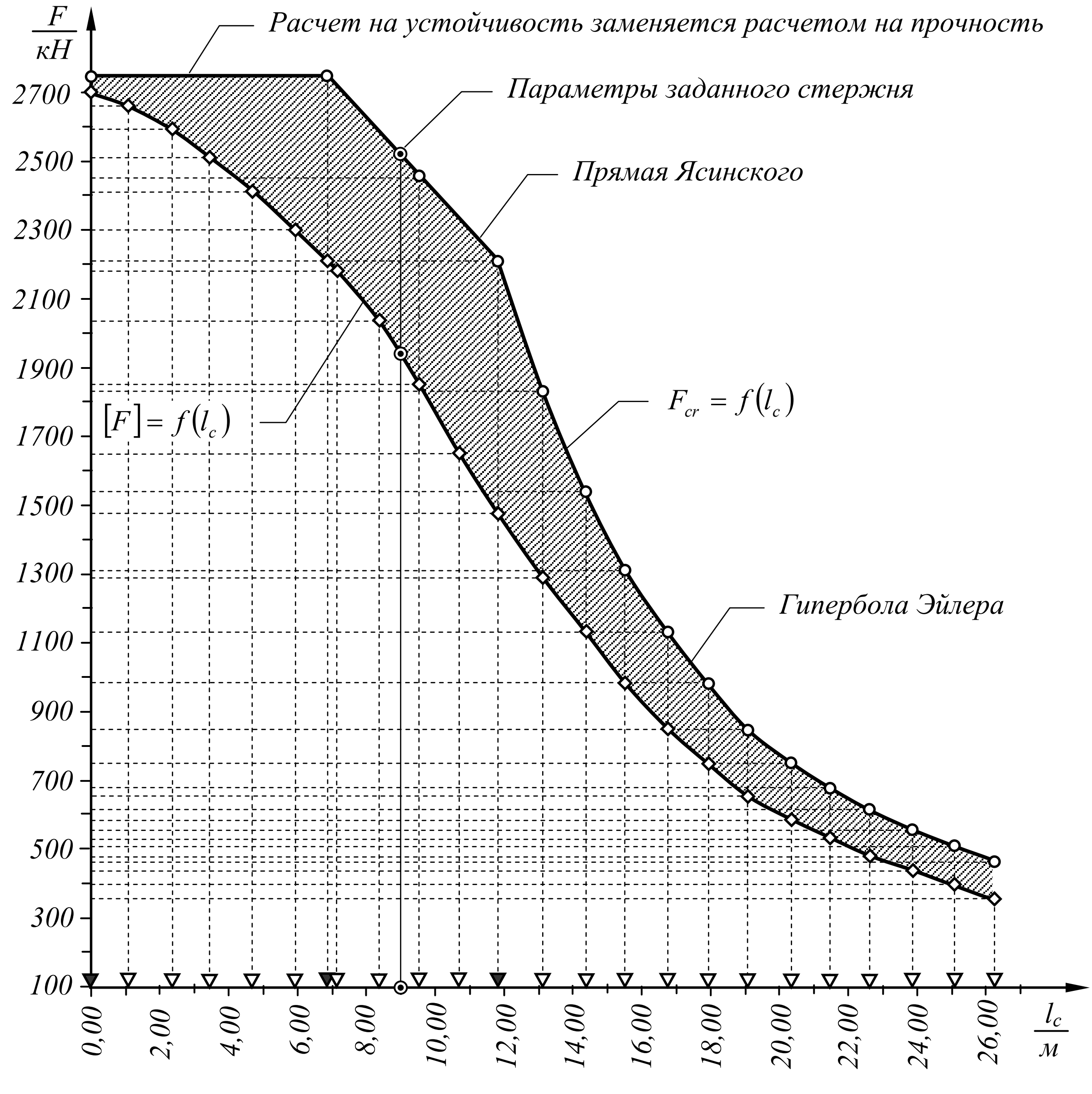


Рис. 3.4. График критической силы и допускаемой сжимающей силы для стержня заданного поперечного сечения

При гибкости стойки, находящейся в диапазоне предельных значений $\lambda_0'' = 57{,}02 \le \lambda \le \lambda_0' = 99{,}30$, задаемся табличными значениями λ (табл. 2.1) и вычисляем величину критических напряжений по формуле Ясинского. Далее находим соответствующие значение критической силы и длины стойки.

Для стержней малой гибкости расчет на устойчивость заменяется расчетом на прочность. При значении $\lambda < \lambda_0'' = 57{,}02$ величина критической силы постоянна и равна

$$F_{cr} = \sigma_{y} \cdot A = 245 \cdot 10^{6} \cdot 112{,}5 \cdot 10^{-4} = 2756{,}25\,\text{кН}.$$

Далее задаемся табличными значениями λ (табл. 3.1) и находим соответствующие значение длины стойки.

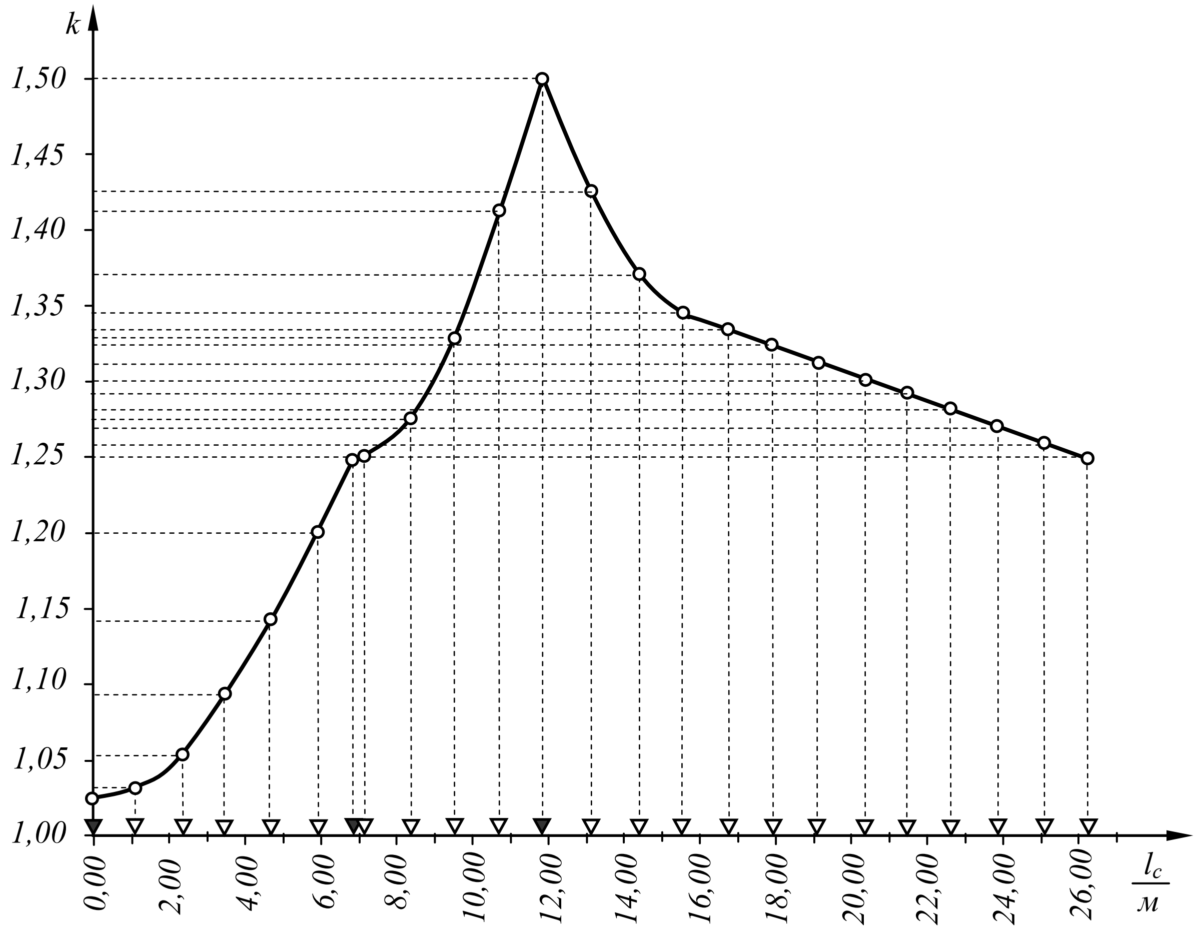


Рис. 3.5. График изменения коэффициента запаса устойчивости

Для всего диапазона изменения гибкости стойки (табл. 3.1) величина допускаемой нагрузки $[F]$ определяется по формуле

$$[F] = \varphi \cdot R \cdot A.$$

Используя полученные значения, строим графики изменения критической силы и допускаемой нагрузки для сжатого стержня с заданным поперечным сечением (рис. 3.4).

Коэффициент запаса устойчивости определяется как отношение критической силы к допускаемой нагрузке

$$k = \frac{F_{cr}}{[F]}.$$

Значения коэффициента запаса устойчивости k, вычисленные по приведенной формуле, представлены в таблице (табл. 3.1). По полученным значениям строим график изменения коэффициента запаса устойчивости для сжатого стержня с заданным поперечным сечением (рис. 3.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. СНиП II-23-81. Стальные конструкции. – М.: Стройиздат.1982.
2. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов. А.В. Александров, Н.Ж. Монахов и др. – М.: Высшая школа, 1975.
3. Алексеев В.Г.. Демченко В.П. Безытерационный способ определения коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость центрально сжатых стержней. // Краснодар. политехн. ин-т. – М., 1984. – Деп. в ВИНИТИ 21.08.84 № 1245-84.