

Министерство образования Российской Федерации
Кубанский государственный технологический университет
Кафедра сопротивления материалов
и строительной механики

РАСЧЕТ СТЕРЖНЕЙ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ОСЕВОМ РАСТЯЖЕНИИ ИЛИ СЖАТИИ

Методические указания к расчетно-графической работе № 3
по курсу “Сопротивление материалов” для студентов 2-го курса
всех строительных специальностей очной формы обучения

КРАСНОДАР
Издательство КубГТУ
2007

Составители: канд. техн. наук, доц. В.Г. Алексеев, д-р. физ.-мат. наук, доц. Н.Н. Фролов, канд. физ.-мат. наук, доц. С.Ю. Молдаванов, канд. физ.-мат. наук, ст. преп. С.Б. Лозовой, ст. преп. В.П. Демченко.

УДК 539.3

Расчет стержней на прочность при осевом растяжении или сжатии. Методические указания к расчетно-графической работе №3 по курсу “Сопротивление материалов” для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения / Кубан. гос. технол. ун-т ; сост. : В. Г. Алексеев, Н. Н. Фролов, С. Ю. Молдаванов, С.Б. Лозовой, В.П. Демченко. Краснодар, 2001. с.

Предлагаемые методические указания содержат решение типовых задач, входящих в состав расчетно-графической работы (РГР) № 3 по курсу “Сопротивление материалов” для студентов строительных специальностей.

Предназначены для студентов 2-го курса всех строительных специальностей очной формы обучения.

Ил. 39. Табл. 7.

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Кубанского государственного технологического университета

Рецензенты: доц. кафедры строительных конструкций КубГТУ
Х. С. Хунагов;
доц. кафедры сопротивления материалов и строительной механики КубГТУ В. В. Попов.

ВВЕДЕНИЕ

Если на стержень действуют внешние нагрузки, равнодействующая которых находится на оси стержня, то стержень продольно деформируется. Такой вид простого сопротивления стержня называется осевым растяжением или сжатием. В поперечных сечениях стержня, работающего в условиях одноосного растяжения или сжатия, возникают только продольные силы.

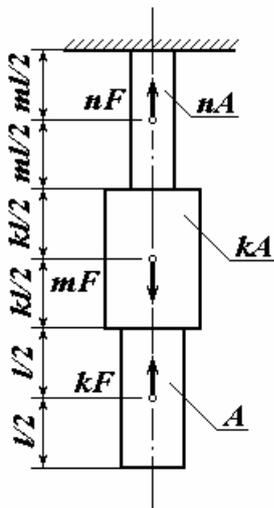
При расчетах на осевое растяжение или сжатие встречаются как статически определимые, так и статически неопределимые задачи. В статически неопределимых системах число неизвестных, подлежащих определению, превышает число уравнений статики, которые могут быть использованы для этой цели. Разница между числом неизвестных и числом уравнений статики определяет число «лишних» неизвестных, или степень статической неопределимости системы. Для раскрытия статической неопределимости систему уравнений статики дополняют уравнениями, описывающими способность реальных тел сопротивляться деформированию.

В данных методических указаниях рассмотрены основные виды расчета простейших стержневых систем, работающих в условиях одноосного растяжения или сжатия:

- проектировочный расчет на прочность и вычисление перемещений для статически определимой стержневой системы;
- проектировочный расчет на прочность статически неопределимого стержня, нагруженного заданной внешней нагрузкой;
- проектировочный расчет на прочность статически неопределимой стержневой системы, находящейся под воздействием заданной нагрузки с учетом заданного изменения температуры стержней и неточности их изготовления;
- расчет на прочность стержневой системы по методу разрушающих нагрузок.

Часть 1. Расчет на прочность статически определимого ступенчатого стержня по допускаемым напряжениям

Исходные данные для расчета:



$m = 1,8$
 $k = 1,5$
 $n = 1,1$
 $l = 0,6 \text{ м}$
 $F = 200 \text{ кН}$
 Стержень медный
 $E_{Cu} = 1,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$
 $[\sigma]_{Cu} = 75 \text{ МПа}$

Решение:

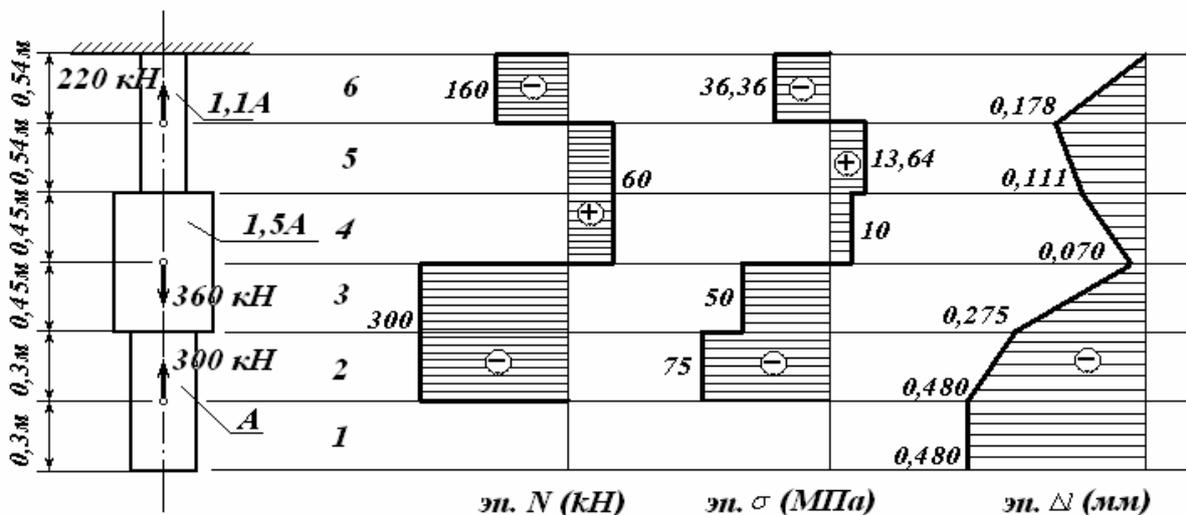


Рисунок 1.

а) Рассматриваемый стержень состоит из 6 участков, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и места изменения размеров поперечного сечения. Проводя произвольные сечения в пределах каждого участка стержня и рассматривая его нижнюю часть (отбрасывая часть с заделкой), находим продольные силы на каждом участке стержня, одновременно строя эпюру продольных сил N (рисунок 1). По эпюре N можно, определить продольную силу в заделке, которая равна -160 кН.

б) Для определения опасного сечения находим нормальные напряжения на каждом участке стержня: $\sigma = \frac{N}{A}$.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = 0;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-300}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{-300}{kA} = \frac{-300}{1,5A} = \frac{-200}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{40}{A};$$

$$\sigma_5 = \frac{54,55}{A};$$

$$\sigma_6 = \frac{-145,45}{A}.$$

Из условий прочности для опасного (второго) участка при растяжении-сжатии:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{300}{A} \leq [\sigma]_{Cu} = 75 \text{ МПа}, \text{ отсюда}$$

$$A = \frac{300}{75} = \frac{300 \cdot 10^3 \text{ Н}}{75 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2.$$

Далее можно определить площадь поперечного сечения каждого участка стержня.

в) Построение эпюры нормальных напряжений.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях участков равны:

$$\sigma_1 = 0;$$

$$\sigma_2 = \frac{-300}{A} = \frac{-300 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = -75 \cdot 10^6 = -75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{-200 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-3}} = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = 13,64 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = -36,36 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений (рисунок 1).

г) Построение эпюры перемещений поперечных сечений вдоль оси.

Для построения эпюры относительных перемещений используем закон Гука для абсолютных удлинений.

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \sigma \frac{l}{E}.$$

Эпюру перемещений следует строить, начиная от заделки, перемещение сечения в которой равно нулю. Удлинения участков соответственно равны:

$$\Delta l_1 = 0;$$

$$\Delta l_2 = \sigma_2 \frac{l_2}{E} = \frac{-75 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,3 \text{ м}}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па}} = -0,000205 \text{ м} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = \frac{-50 \cdot 10^6 \cdot 0,45}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = 0,041 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = 0,067 \text{ мм};$$

$$\Delta l_6 = -0,178 \text{ мм};$$

Ординаты эпюры перемещений границ участков будут:

$$y_6 = \Delta l_6 = -0,178 \text{ мм};$$

$$y_5 = \Delta l_6 + \Delta l_5 = -0,178 + 0,067 = -0,111 \text{ мм};$$

$$y_4 = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 = -0,070 \text{ мм};$$

$$y_3 = \sum_3^6 \Delta l_i = -0,275 \text{ мм};$$

$$y_2 = -0,480 \text{ мм};$$

$$y_1 = -0,480 \text{ мм}.$$

По полученным перемещениям сечений строим эпюру перемещений (рисунок 1).

Часть 2. Расчет статически неопределимого ступенчатого стержня

Исходные данные для расчета все те же. К статически определимому стержню подводим вторую опору (заделку). Стержень становится однажды статически неопределим (рисунок 2).

Так как задача статически неопределима, то для определения опорных реакций необходимо рассмотреть три стороны задачи: статическую, геометрическую, физическую.

а) Статическая сторона задачи:

Из уравнения статического равновесия стержня АВ $\Sigma y = 0$ (рисунок 2) имеем:

$$\begin{aligned} -V_A + 220 - 360 + 300 - V_B &= 0; \\ V_A + V_B &= 160. \end{aligned}$$

б) Геометрическая сторона задачи:

Воспользуемся условием совместности деформаций, выражающее

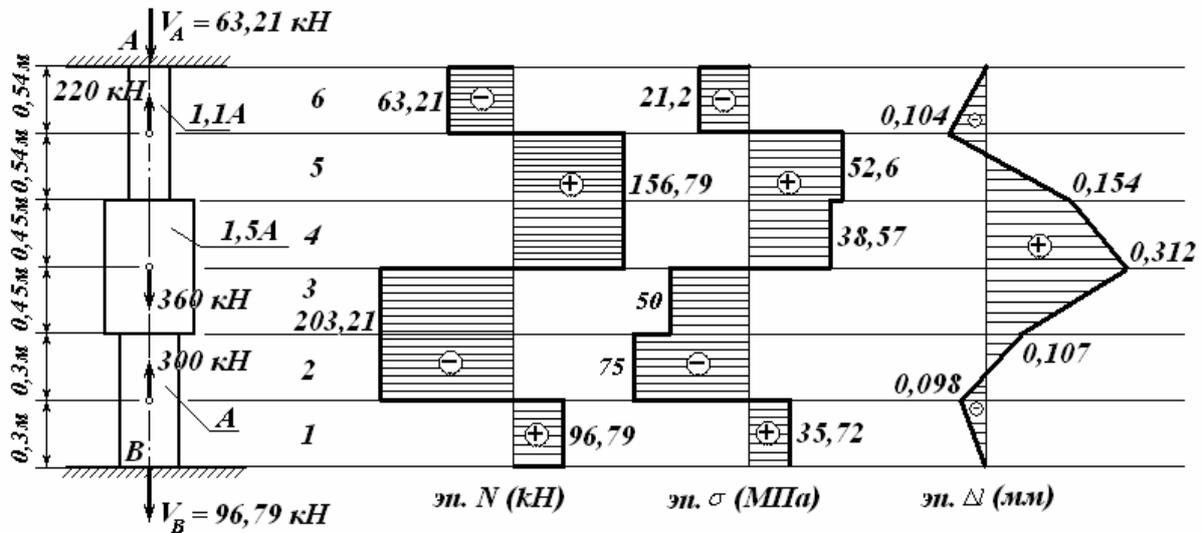


Рисунок 2.

то, что расстояние между точками А и В не изменяется, т.е. $\Delta l_{AB} = 0$;
 $\Delta l_{AB} = l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 = 0$.

в) Физическая сторона задачи:

По закону Гука: $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$. Определим вначале продольные силы:

$$N_1 = V_B;$$

$$N_2 = V_B - 300;$$

$$N_3 = V_B - 300;$$

$$N_4 = V_B - 300 + 360 = V_B + 60;$$

$$N_5 = V_B + 60;$$

$$N_6 = V_B - 160.$$

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{V_B \cdot 0,3}{EA};$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{(V_B - 300) \cdot 0,3}{EA};$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{EA_3} = \frac{(V_B - 300) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A};$$

$$\Delta l_4 = \frac{(V_B + 60) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A};$$

$$\Delta l_5 = \frac{(V_B + 60) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A};$$

$$\Delta l_6 = \frac{(V_B - 160) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A}.$$

Подставляя все в уравнение совместности деформаций, получим:

$$\frac{V_B \cdot 0,3}{EA} + \frac{(V_B - 300) \cdot 0,3}{EA} + \frac{(V_B - 300) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A} + \frac{(V_B + 60) \cdot 0,45}{E \cdot 1,5A} + \frac{(V_B + 60) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A} + \frac{(V_B - 160) \cdot 0,54}{E \cdot 1,1A} = 0$$

$$7,27 V_B = 703,64$$

$$V_B = 96,79 \text{ кН, тогда } V_A = 160 - V_B = 63,21 \text{ кН.}$$

Т.к. обе реакции получились положительные, то их направление соответствует принятому.

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 2).

д) Для определения опасного сечения находим нормальные напряжения на каждом участке стержня: $\sigma = \frac{N}{A}$.

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{96,79}{A};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-203,21}{A};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{N_3}{1,5A} = \frac{-135,47}{A};$$

$$\sigma_4 = \frac{104,53}{A};$$

$$\sigma_5 = \frac{142,54}{A};$$

$$\sigma_6 = \frac{-57,46}{A}.$$

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{203,21}{A} \leq [\sigma]_{Cu} = 75 \text{ МПа, отсюда}$$

$$A = \frac{300}{75} = \frac{203,21 \cdot 10^3 \text{ Н}}{75 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 2,71 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 27,1 \text{ см}^2$$

е) Построение эпюры нормальных напряжений σ_i (рисунок 2):

$$\sigma_1 = \frac{96,79}{A} = \frac{96,79 \cdot 10^3}{2,71 \cdot 10^{-3}} = 35,72 \cdot 10^6 \text{ Па} = 35,72 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{-203,21 \cdot 10^3}{2,71 \cdot 10^{-3}} = -75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = -50 \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = 38,57 \text{ МПа};$$

$$\sigma_5 = 52,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma_6 = -21,2 \text{ МПа}.$$

ж) Построение эпюры относительных перемещений:

$$\Delta l = \sigma \frac{l}{E}$$

$$\Delta l_1 = \sigma_1 \frac{l_1}{E} = \frac{35,72 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,3 \text{ м}}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 9,74 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 0,097 \text{ мм};$$

$$\Delta l_2 = \sigma_2 \frac{l_2}{E} = \frac{-75 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 0,3 \text{ м}}{1,1 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па}} = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_3 = -0,205 \text{ мм};$$

$$\Delta l_4 = 0,158 \text{ мм};$$

$$\Delta l_5 = 0,258 \text{ мм};$$

$$\Delta l_6 = -0,104 \text{ мм};$$

Ординаты эпюры перемещений границ участков будут:

$$y_6 = \Delta l_6 = -0,104 \text{ мм};$$

$$y_5 = \Delta l_6 + \Delta l_5 = -0,104 + 0,258 = 0,154 \text{ мм};$$

$$y_4 = \Delta l_6 + \Delta l_5 + \Delta l_4 = 0,312 \text{ мм};$$

$$y_3 = \sum_3^6 \Delta l_i = 0,107 \text{ мм};$$

$$y_2 = -0,098 \text{ мм};$$

$$y_1 = -0,001 \text{ мм} \approx 0.$$

Таким образом, полное удлинение ступенчатого стержня, равное алгебраической сумме удлинений всех участков оказалось равным нулю, что свидетельствует о достаточной точности приведенного выше расчета. По полученным значениям y_i строим эпюру перемещений (рисунок 2).

ВЫВОДЫ: Сравнивая эпюры продольных сил, нормальных напряжений и осевых перемещений сечений рассмотренных статически определимого (рисунок 1) и статически не определимого (рисунок 2) стержней, можно сделать следующие заключения:

1) Произошло изменение продольных сил и напряжений на многих участках стержня. Участок 1, не работавший в статически определимом стержне, стал работать на растяжение в статически неопределимом стержне.

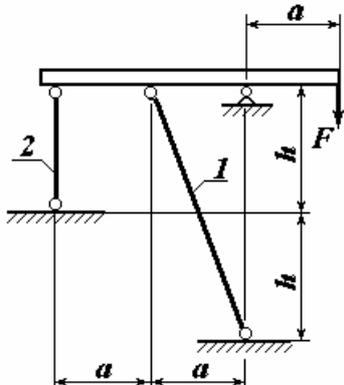
2) Напряжения в поперечных сечениях всех участков статически неопределимого стержня оказались меньше чем в статически определимом, следовательно его несущая способность выше несущей способности последнего. Уменьшилась площадь поперечного сечения участков статически неопределимого стержня, следовательно, применение такой конструкции экономически выгодно с точки зрения расхода материала.

3) В соответствии с изменениями напряжений изменился характер деформаций участков стержня и осевых перемещений его поперечных сечений.

Часть 3. Расчет плоской, статически неопределимой стержневой системы

Исходные данные:

- $h = 4 \text{ м,}$
- $a = 3 \text{ м,}$
- $F = 200 \text{ кН,}$
- $A_1/A_2 = 2,$
- Стержни алюминиевые,
- $E_{Al} = 0,69 \cdot 10^5 \text{ МПа,}$
- $[\sigma]_{Al} = 55 \text{ МПа,}$
- $\alpha' = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ 1/}^\circ\text{C,}$
- $\Delta t = 80^\circ\text{C,}$
- $\delta_1 = 0,15 \text{ см.}$



3.1 Определение усилий в стержнях 1 и 2.

Для выявления усилий, возникающих в элементах заданной системы под действием только силы F , вырежем жесткий стержень ABC с прилегающими к нему деформируемыми стержнями 1 и 2 (рисунок 3).

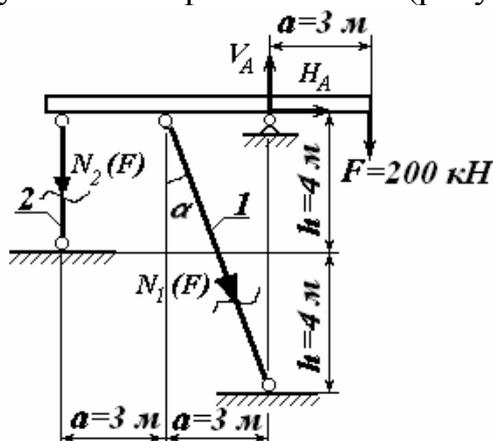


Рисунок 3.

Стержень ABC находится в равновесии под действием плоской системы сил $V_A, H_A, N_1(P), N_2(P), P$, где $N_1(P), N_2(P)$ – усилия в стержнях 1 и 2, передающиеся стержню ABC.

Таким образом, задача является однажды статически неопределимой, так как число неизвестных усилий равно четырем $V_A, H_A, N_1(P), N_2(P)$, а число возможных уравнений статического равновесия равно трем. Для раскрытия статической неопределимости системы рассмотрим три стороны задачи.

а) Статическая сторона задачи:

Из уравнений статического равновесия стержня ABC следует (рисунок 3):

$$\begin{cases} \Sigma x = 0; & \begin{cases} N_1(F) \sin \alpha + H_A = 0, & (1) \\ -N_2(F) - N_1(F) \cos \alpha + V_A - F = 0, & (2) \\ N_2(F) \cdot 2a + N_1(F) \cos \alpha \cdot a - F \cdot a = 0 & (3) \end{cases} \end{cases}$$

б) Геометрическая сторона задачи:

Под действием силы $F = 200$ кН жесткий брус ABC повернется вокруг точки А на малый угол $\gamma \ll 1$ и займет положение AB_1C_1 (рисунок 4). При этом стержень 1 удлинится на величину $BB_2 = \Delta l_1(F)$, а стержень 2 удлинится на величину $CC_1 = \Delta l_2(F)$:

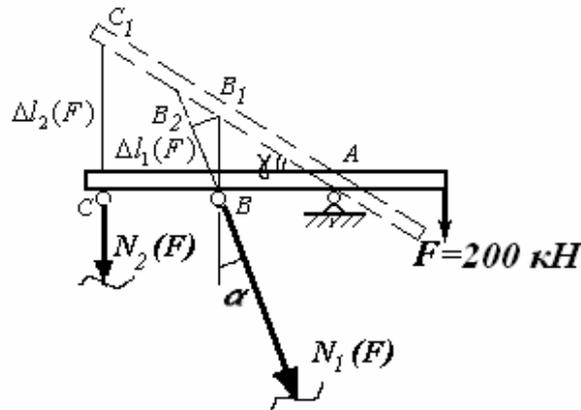


Рисунок 4.

Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 следует $\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$.

$$CC_1 = \Delta l_2(F); \quad BB_1 = \frac{\Delta l_1(F)}{\cos \alpha}, \quad \text{тогда} \quad \frac{\Delta l_1(F)}{\cos \alpha \cdot \Delta l_2(F)} = \frac{a}{2a} \quad \text{или}$$

$$\Delta l_1(F) = \frac{1}{2} \Delta l_2(F) \cos \alpha \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой условие совместности деформаций элементов системы.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{2h} = \frac{3}{8}; \quad \alpha = 20^\circ 33'; \quad \sin \alpha = 0,35, \quad \cos \alpha = 0,94.$$

$$\text{Длины стержней} \quad l_1 = \frac{3}{\sin \alpha} = 8,54 \text{ м}, \quad l_2 = h = 4 \text{ м}.$$

в) Физическая сторона задачи.

Удлинения стержней 1 и 2 вызваны усилиями $N_1(P)$, $N_2(P)$, действующими в этих стержнях. На основании закона Гука:

$$\begin{aligned} \Delta l_1(F) &= \frac{N_1(F) l_1}{EA_1} = \frac{3N_1(F)}{EA_1 \sin \alpha} \\ \Delta l_2(F) &= \frac{N_2(F) l_2}{EA_2} = \frac{2N_2(F) \cdot h}{EA_1} \end{aligned} \quad (5)$$

Подставим (5) в (4):
$$\frac{3N_1(F)}{EA_1 \sin \alpha} = \frac{1}{2} \frac{2N_2(F) \cdot h}{EA_1} \cos \alpha$$

$$N_1(F) = 0,438N_2(F) \quad (6)$$

Решим совместно систему уравнений (3) и (6):

$$\begin{cases} 6N_2(F) + 2,81N_1(F) = 600 \\ N_1(F) = 0,438N_2(F) \end{cases}, \quad \begin{cases} N_1(F) = 36,35 \text{ кН}, \\ N_2(F) = 82,98 \text{ кН} \end{cases}$$

г) Выбираем наиболее напряженный стержень:

$$\sigma_1 = \frac{N_1(F)}{A_1} = \frac{36,35}{A_1};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2(F)}{A_2} = \frac{82,98}{A_1/2} = \frac{165,97}{A_1}.$$

Из условий прочности для второго стержня, определим безопасную площадь поперечного сечения:

$$|\sigma_{\max}| = |\sigma_2| = \frac{165,97}{A_1} \leq [\sigma]_{Al} = 55 \text{ МПа}, \text{ отсюда}$$

$$A_1 = \frac{165,97 \cdot 10^3 \text{ Н}}{55 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 3,02 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 30,2 \text{ см}^2.$$

д) Напряжения и удлинения в стержнях равны:

$$\sigma_1 = \frac{N_1(F)}{A_1} = \frac{36,35 \cdot 10^3}{3,02 \cdot 10^{-3}} = 12,04 \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2(F)}{A_2} = \frac{82,98 \cdot 10^3}{1,51 \cdot 10^{-3}} = 54,95 \text{ МПа}.$$

$$\Delta l_1 = \sigma_1 \frac{l_1}{E} = \frac{12,04 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 8,54 \text{ м}}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 149,02 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 1,49 \text{ мм}$$

$$\Delta l_2 = \sigma_2 \frac{l_2}{E} = \frac{54,95 \cdot 10^6 \text{ Па} \cdot 4 \text{ м}}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \text{ Па}} = 318,55 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 3,19 \text{ мм}$$

3.2 Определение температурных напряжений и перемещений.

При изменении температуры в стержнях системы возникают дополнительные усилия $N_1(t)$ и $N_2(t)$. Разъединим мысленно стержни в узлах и дадим им возможность свободно удлиняться при действии температуры. Тогда удлинения стержней 1 и 2 будут равны:

$$\Delta l_1(t) = \alpha' l_1 \Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 8,54 \cdot 80^\circ = 17,088 \cdot 10^{-3} \text{ м};$$

$$\Delta l_2(t) = \alpha' l_2 \Delta t = 2,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4 \cdot 80^\circ = 8 \cdot 10^{-3} \text{ м}. \quad (7)$$

Отложив в масштабе значения $\Delta l_1(t)$ и $\Delta l_2(t)$ видим, что стержень 1 нужно сжать на величину Δl_1 , а стержень 2 растянуть на Δl_2 . В соответствии с этим выбираем направления $N_1(t)$ – сжимающее 1 стержень и $N_2(t)$ – растягивающее 2 стержень.

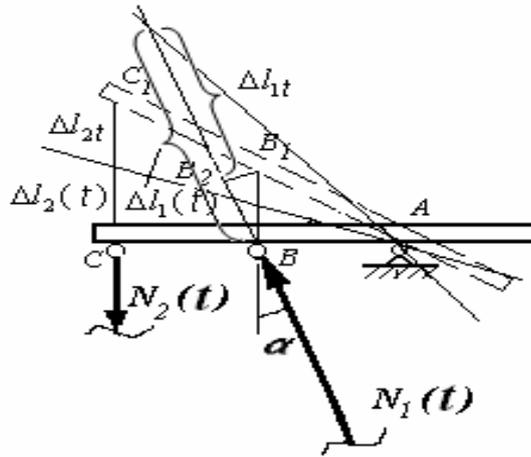


Рисунок 5.

Для определения температурных усилий $N_1(t)$ и $N_2(t)$ вырежем жесткий стержень AC, который находится в равновесии под действием усилий V_A , H_A , $N_1(t)$, $N_2(t)$. Число неизвестных усилий равно четырем, а число возможных уравнений статического равновесия равно трем. Следовательно, задача однажды статически неопределимая. Для раскрытия статической неопределимости рассмотрим, как обычно, три стороны задачи.

а) Статическая сторона задачи:

$$\begin{cases} \Sigma x = 0; \\ \Sigma y = 0; \\ \Sigma m_A = 0; \end{cases} \begin{cases} H_A - N_1(t) \sin \alpha = 0, \\ V_A + N_1(t) \cos \alpha - N_2(t) = 0, \\ N_2(t) \cdot 2a - N_1(t) \cos \alpha \cdot a = 0 \end{cases}$$

$$2N_2(t) = N_1(t) \cos \alpha$$

$$N_2(t) = 0,47N_1(t)$$

(8)

б) Геометрическая сторона задачи:

Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 следует $\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$.

Так как $CC_1 = \Delta l_2(t) + \Delta l_{2t}$; $BB_1 = \frac{BB_2}{\cos \alpha} = \frac{\Delta l_1(t) - \Delta l_{1t}}{\cos \alpha}$, то

$$\frac{\Delta l_1(t) - \Delta l_{1t}}{\cos \alpha \cdot (\Delta l_2(t) + \Delta l_{2t})} = \frac{a}{2a} \text{ или}$$

$$2(\Delta l_1(t) - \Delta l_{1t}) = (\Delta l_2(t) + \Delta l_{2t}) \cos \alpha -$$

(9)

уравнение совместности деформаций элементов системы.

в) Физическая сторона задачи:

Удлинения стержней 1 и 2, вызванные усилиями $N_1(t)$ и $N_2(t)$, действующими в этих стержнях, на основании закона Гука равны:

$$\Delta l_{1t} = \frac{N_1(t)l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_{2t} = \frac{N_2(t)l_2}{EA_2}$$

(10)

Подставляя выражения (7) и (10) в уравнение (9), получим:

$$2 \left(\alpha' l_1 \Delta t - \frac{N_1(t) l_1}{EA_1} \right) = \left(\alpha' l_2 \Delta t + \frac{N_2(t) l_2}{EA_2} \right) \cos \alpha$$

$$2 \left(17,088 \cdot 10^{-3} - \frac{N_1(t) \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} \right) = \left(8 \cdot 10^{-3} + \frac{N_2(t) \cdot 4}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,51 \cdot 10^{-3}} \right) \cdot 0,936$$

или после преобразований $0,000035568 N_2(t) + 0,000082 N_1(t) = 26,68$.

Решив это уравнение совместно с (8), получим:

$$N_1(t) = 270,54 \text{ кН} - \text{сжимающее усилие,}$$

$$N_2(t) = 126,61 \text{ кН} - \text{растягивающее усилие.}$$

г) Напряжения в стержнях 1 и 2 от усилий $N_1(t)$ и $N_2(t)$ равны:

$$\sigma_1(t) = -\frac{N_1(t)}{A_1} = -\frac{270,54 \cdot 10^3}{3,02 \cdot 10^{-3}} = -89,64 \text{ МПа,}$$

$$\sigma_2(t) = \frac{N_2(t)}{A_2} = \frac{126,61 \cdot 10^3}{1,51 \cdot 10^{-3}} = 83,91 \text{ МПа.}$$

д) Результирующие удлинения стержней:

$$\Delta l_{1t}^* = \Delta l_1(t) - \Delta l_{1t} = \alpha' l_1 \Delta t - \frac{N_1(t) l_1}{EA_1} = 17,088 \cdot 10^{-3} - \frac{270,54 \cdot 10^3 \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = 5,988 \cdot 10^{-3} \text{ м,}$$

$$\Delta l_{2t}^* = \Delta l_2(t) - \Delta l_{2t} = \alpha' l_2 \Delta t + \frac{N_2(t) l_2}{EA_2} = 12,864 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Проверим, выполняется ли равенство (9):

$$2\Delta l_{1t}^* = \Delta l_{2t}^* \cos \alpha$$

$$2 \cdot 5,988 \cdot 10^{-3} = 12,864 \cdot 10^{-3} \cdot 0,936$$

$$11,976 \approx 12,040$$

Погрешность вычислений: $\delta = \frac{12,040 - 11,976}{11,976} \cdot 100\% = 0,53\% < 1\%$, что до-

пустимо в технических расчетах.

3.3 Определение напряжений и перемещений, вызванных неточностью изготовления стержня 1.

Так как стержень 1 изготовлен длиннее, чем предусмотрено схемой, то при сборке системы жесткий стержень АС займет положение АС₁ (рисунок б). При этом в стержне 1 возникнет сжимающее усилие $N_1(\delta)$, а в стержне 2 – растягивающее усилие $N_2(\delta)$. Стержень АС₁ находится в равновесии под действием усилий V_A , H_A , $N_1(\delta)$, $N_2(\delta)$. Задача, как и в предыдущих случаях, однажды статически неопределима. Для раскрытия статической неопределимости рассматриваем снова три стороны задачи.

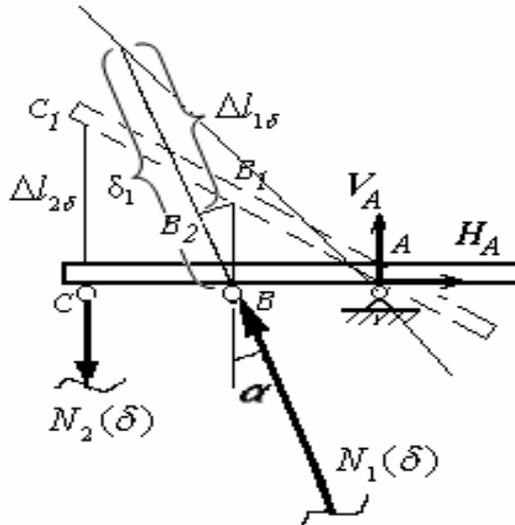


Рисунок 6.

а) Статическая сторона задачи.

$$\begin{cases} \Sigma x = 0; \\ \Sigma y = 0; \\ \Sigma m_A = 0; \end{cases} \begin{cases} H_A - N_1(\delta) \sin \alpha = 0, \\ V_A + N_1(\delta) \cos \alpha - N_2(\delta) = 0, \\ N_1(\delta) \cos \alpha \cdot a - N_2(\delta) \cdot 2a = 0 \end{cases} \quad (11)$$

б) Геометрическая сторона задачи

Из подобия треугольников ABB_1 и ACC_1 следует $\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$.

Так как $BB_1 = \frac{BB_2}{\cos \alpha} = \frac{\delta_1 - \Delta l_{1\delta}}{\cos \alpha}$, $CC_1 = \Delta l_{2\delta}$, то

$$\frac{\delta_1 - \Delta l_{1\delta}}{\Delta l_{2\delta} \cdot \cos \alpha} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \quad \text{или}$$

$$2(\delta_1 - \Delta l_{1\delta}) = \Delta l_{2\delta} \cos \alpha \quad (12)$$

уравнение совместности деформаций элементов системы.

в) Физическая сторона задачи:

Укорочение стержня 1 и удлинение стержня 2, вызванные усилиями $N_1(\delta)$, $N_2(\delta)$, действующими в этих стержнях, на основании закона Гука равны:

$$\Delta l_{1t} = \frac{N_1(t)l_1}{EA_1}; \quad \Delta l_{2t} = \frac{N_2(t)l_2}{EA_2} \quad (13)$$

Подставляя выражения (13) в (12), будем иметь:

$$2 \left(\delta_1 - \frac{N_1(\delta)l_1}{EA_1} \right) = \frac{N_2(\delta)l_2}{EA_2} \cos \alpha.$$

Решив это уравнение совместно с (11), получим:

$$\begin{cases} 2 \left(0,0015 - \frac{N_1(\delta) \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} \right) = \frac{N_2(\delta) \cdot 4}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 1,51 \cdot 10^{-3}} \cdot 0,936 \\ 3N_1(\delta) \cdot 0,94 - 6N_2(\delta) = 0, \end{cases}$$

откуда $N_1(\delta) = 14,22 \text{ кН}$ - сжимающее усилие,

$N_2(\delta) = 30,28 \text{ кН}$ - растягивающее усилие.

г) Монтажные напряжения в стержнях 1 и 2 от усилий $N_1(\delta)$, $N_2(\delta)$ равны:

$$\sigma_1(\delta) = -\frac{N_1(\delta)}{A_1} = -\frac{30,28 \cdot 10^3}{3,02 \cdot 10^{-3}} = -10,03 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2(\delta) = \frac{N_2(\delta)}{A_2} = \frac{14,22 \cdot 10^3}{1,51 \cdot 10^{-3}} = 9,42 \text{ МПа}.$$

д) Перемещения стержней 1 и 2 равны:

$$\Delta l_{1\delta}^* = \delta_1 - \Delta l_{1\delta} = \delta_1 - \frac{N_1(\delta)l_1}{EA_1} = 0,0015 - \frac{30,28 \cdot 10^3 \cdot 8,54}{0,69 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,02 \cdot 10^{-3}} = 0,00026 \text{ м} = 0,026 \text{ см},$$

$$\Delta l_{2\delta}^* = \Delta l_{2\delta} = \frac{N_2(\delta)l_2}{EA_2} = 0,00055 \text{ м} = 0,055 \text{ см}.$$

Проверим, выполняется ли равенство (12):

$$2\Delta l_{1\delta}^* = \Delta l_{2\delta}^* \cos \alpha$$

$$2 \cdot 0,026 = 0,055 \cdot 0,936$$

$$0,052 = 0,052$$

3.4 Определение усилий, напряжений и перемещений стержней

Для определения усилий, напряжений и перемещений стержней системы пользуемся принципом независимости действия сил.

а) Усилия в стержнях равны:

$$N_1 = N_1(F) + N_1(t) + N_1(\delta) = 36,35 - 270,54 - 30,28 = -264,47 \text{ кН},$$

$$N_2 = N_2(F) + N_2(t) + N_2(\delta) = 82,98 + 126,61 + 14,22 = 223,81 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \Sigma m_A = 0; \quad N_2 \cdot 2a + N_1 \cos \alpha \cdot a - F \cdot a &= 223,81 \cdot 6 - 264,47 \cdot 0,936 \cdot 3 - 600 = \\ &= 1342,86 - 1345,81 = -2,95; \end{aligned}$$

Погрешность вычислений: $\delta = \frac{-2,95}{1342,86} \cdot 100\% = -0,22\% < 1\%$, что допустимо

в технических расчетах.

б) Напряжения в стержнях равны:

$$\sigma_1 = \sigma_1(F) + \sigma_1(t) + \sigma_1(\delta) = 12,04 - 89,643 - 10,03 = -87,63 \text{ МПа},$$

$$\sigma_2 = \sigma_2(F) + \sigma_2(t) + \sigma_2(\delta) = 54,95 + 83,906 + 9,42 = 148,28 \text{ МПа}.$$

в) Перемещения в стержнях равны:

$$\Delta l_1 = \Delta l_1(F) + \Delta l_{1t}^* + \Delta l_{1\delta}^* = 149,02 \cdot 10^{-5} + 5,988 \cdot 10^{-3} + 0,00026 = 7,74 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \Delta l_2(F) + \Delta l_{2t}^* + \Delta l_{2\delta}^* = 318,55 \cdot 10^{-5} + 12,864 \cdot 10^{-3} + 0,00055 = 16,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

г) Геометрическая проверка

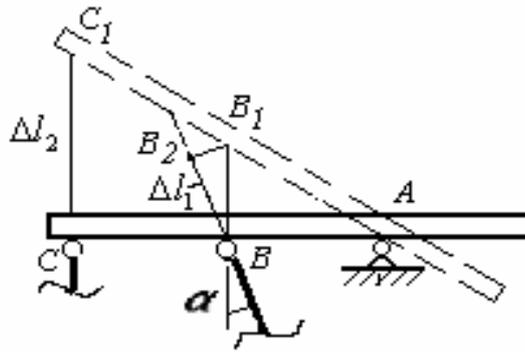


Рисунок 7.

Вычисленные перемещения Δl_1 и Δl_2 , отложенные в масштабе (рисунок 7), должны удовлетворять условию совместности деформаций системы, т.е. должно соблюдаться равенство $\frac{BB_1}{CC_1} = \frac{AB}{AC}$ или $\frac{\Delta l_1}{\cos \alpha \cdot \Delta l_2} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$, откуда

$$\frac{7,74 \cdot 10^{-3}}{0,94 \cdot 16,59 \cdot 10^{-3}} = 0,5$$

$$0,5 = 0,5$$

ВЫВОДЫ:

1) В статически неопределимых системах в отличие от статически определенных систем:

а) изменение температуры и неточность изготовления элементов системы приводят к появлению температурных и монтажных усилий и напряжений;

б) температурные и монтажные усилия и напряжения пропорциональны вызвавшим их факторам;

в) усилия по элементам системы распределяются пропорционально относительным жесткостям элементов.

2) Суммарные напряжения во втором стержне оказались значительно выше допустимых. Снизить эти напряжения можно различными способами, например:

а) уменьшить δ первого стержня;

б) создать $+\delta$ второго стержня;

в) увеличить рабочую температуру второго стержня;

г) увеличить сечения стержней, сохранив заданное соотношение площадей и др..