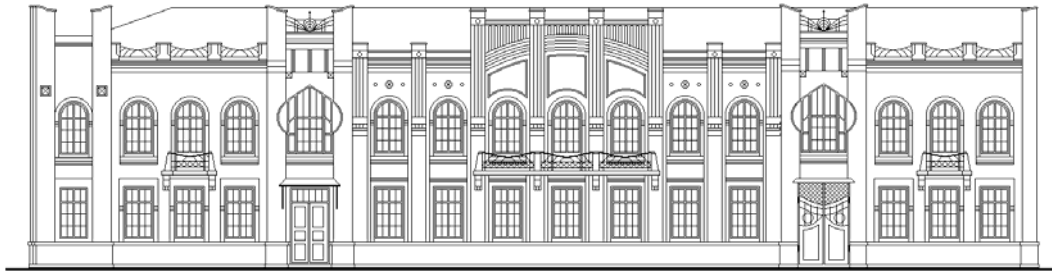


МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ И СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ



СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ (ОБЩИЙ КУРС)

Примеры решения контрольных работ
для студентов заочной формы обучения
всех строительных специальностей

Краснодар
2008

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доц. С.Ю. Молдаванов

УДК 539.3/8

Сопротивление материалов (общий курс): Примеры решения контрольных работ для студентов заочной формы обучения всех строительных специальностей / С.Ю. Молдаванов – Краснодар: Изд. КубГТУ, 2008. – 43 с.

В предлагаемых методических указаниях приведены примеры решения контрольных работ, выполняемых студентами-заочниками всех строительных специальностей в 6 и 7 семестрах при изучении общего курса сопротивления материалов. Примеры, представленные в данной работе, полностью соответствуют контрольным заданиям для студентов заочной формы обучения всех строительных специальностей, утвержденным кафедрой «Сопротивление материалов и строительная механика» КубГТУ в 2007 г.

Предназначены для студентов 3-го и 4-го курсов всех строительных специальностей заочной формы обучения.

Ил. 17.

ЗАДАЧА № 1

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Для заданного поперечного сечения, состоящего из швеллера и равнобокого уголка, или из двутавра и равнобокого уголка, или из швеллера и двутавра, требуется:

- 1) определить положение центра тяжести;
- 2) найти осевые и центробежный моменты инерции относительно случайных осей, проходящих через центр тяжести сечения (z_c и y_c);
- 3) определить направление главных центральных осей (u и v);
- 4) Найти моменты инерции относительно главных центральных осей;
- 5) Вычертить сечение в масштабе и указать на нем все размеры в числах и все оси.

Исходные данные для решения задачи: составное сечение состоит из швеллера № 16; равнобокого уголка $90 \times 90 \times 6$. Сечение показано на рис. 1.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим первый элемент сечения швеллер № 16 (ГОСТ 8240-72). Площадь поперечного сечения $A_1 = 18,1 \text{ см}^2$. Величина смещения главных осей элемента от внешней грани полки $x_{01} = 1,80 \text{ см}$. Осевые моменты инерции первого элемента равны: $J_{x1} = 747 \text{ см}^4$, $J_{y1} = 63,3 \text{ см}^4$. Центробежный момент: $D_{y1x1} = 0$.

Рассмотрим второй элемент сечения равнобокий уголок $90 \times 90 \times 6$ (ГОСТ 8509-72). Площадь сечения второго элемента $A_2 = 10,6 \text{ см}^2$. Моменты инерции этого элемента относительно центральных осей в соответствии с сортаментом прокатной стали равны: $J_{y2} = J_{x2} = 82,1 \text{ см}^4$; $J_{max} = 130 \text{ см}^4$; $J_{min} = 34 \text{ см}^4$. Величина смещения главных осей элемента от внешних граней полки $x_{02} = y_{02} = 2,43 \text{ см}$. Центробежный момент инерции равнополочного уголка:

$$D_{x_2y_2} = \frac{J_{max} - J_{min}}{2} \sin 2\theta = \frac{130 - 34}{2} \sin(-2 \cdot 45^\circ) = -48 \text{ см}^4.$$

Выбираем вспомогательную систему прямоугольных декартовых координат, проводя оси ξ и η через центр тяжести одного из элементов сечения таким образом, чтобы они были параллельны осям y_i и x_i . Определяем координаты центров тяжести элементов сечения в новой системе $\xi - \eta$

$$\begin{aligned} \eta_1 &= 0; & \xi_1 &= 0; \\ \eta_2 &= (2 \cdot 9,0 - 2,43) - 16/2 = 7,57 \text{ см}; & \xi_2 &= -1,80 - 2,43 = -4,23 \text{ см}. \end{aligned}$$

Вычисляем координаты положения центра тяжести составного сечения

$$\eta_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \eta_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{0 \times 18,1 + 7,57 \times 10,6}{18,1 + 10,6} = 2,80 \text{ см};$$

$$\xi_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \xi_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{0 \times 18,1 + (-4,23) \times 10,6}{18,1 + 10,6} = -1,56 \text{ см}.$$

Через точку C , имеющую координаты $\xi_c = -1,56$ см и $\eta_c = 2,80$ см, проводим центральные оси Y и X составного сечения параллельно осям его элементов y_i и x_i . Для проверки правильности определения положения центра тяжести составного сечения воспользуемся свойством центральных осей, которое гласит, что статический момент относительно указанных осей равен нулю. Предварительно вычисляем координаты центров тяжести элементов сечения в системе центральных осей Y и X :

$$b_1 = \xi_1 - \xi_c = 0 - (-1,56) = 1,56 \text{ см}; \quad a_1 = \eta_1 - \eta_c = 0 - 2,80 = -2,80 \text{ см};$$

$$b_2 = \xi_2 - \xi_c = (-4,23) - (-1,56) = -2,67 \text{ см}; \quad a_2 = \eta_2 - \eta_c = 7,57 - 2,80 = 4,77 \text{ см};$$

Находим величины статических моментов относительно центральных осей Y и X

$$S_X = A_1 a_1 + A_2 a_2 = 18,1 \times (-2,80) + 10,6 \times 4,77 = -50,68 + 50,562 = -0,118 \text{ см}^3.$$

Погрешность вычислений $\frac{0,118}{50,68} \times 100\% = 0,23\%$.

$$S_Y = A_1 b_1 + A_2 b_2 = 18,1 \times 1,56 + 10,6 \times (-2,67) = 28,236 - 28,302 = -0,066 \text{ см}^3.$$

Погрешность вычислений $\frac{0,066}{28,302} \times 100\% = 0,23\%$. Погрешность в обоих

случаях не превышает 5%, следовательно, положение центра тяжести составного сечения найдено верно.

Осевые моменты инерции составного поперечного сечения определяются по формулам, учитывающим плоско-параллельное смещение центральных осей его элементов относительно центральных осей сечения в целом

$$J_Y = \sum_{i=1}^n (J_{y_i} + b_i^2 A_i) = (J_{y_1} + b_1^2 A_1) + (J_{y_2} + b_2^2 A_2) =$$

$$= 63,3 + 1,56^2 \times 18,1 + 82,1 + (-2,67)^2 \times 10,6 = 265,01 \text{ см}^4;$$

$$J_X = \sum_{i=1}^n (J_{x_i} + a_i^2 A_i) = (J_{x_1} + a_1^2 A_1) + (J_{x_2} + a_2^2 A_2) =$$

$$= 747 + (-2,8)^2 \times 18,1 + 82,1 + 4,77^2 \times 10,6 = 1212,18 \text{ см}^4.$$

Центробежный момент инерции составного сечения относительно осей Y и X с учетом смещения осей его элементов относительно центральных осей составного сечения равен

$$D_{YX} = \sum_{i=1}^n (D_{yixi} + a_i b_i A_i) = (D_{y1x1} + a_1 b_1 A_1) + (D_{y2x2} + a_2 b_2 A_2) = \\ = 0 + 1,56 \times (-2,8) \times 18,1 - 48 + (-2,67) \times 4,77 \times 10,6 = -262,06 \text{ см}^4.$$

Для определения положения главных центральных осей инерции сечения воспользуемся следующей формулой

$$\alpha = 0,5 \operatorname{arctg} \left(\frac{2 D_{YX}}{J_Y - J_X} \right) = 0,5 \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \times (-262,06)}{265,01 - 1212,18} \right) = 14,48^\circ.$$

Угол поворота центральных осей Y и X до положения главных центральных осей V и U имеет положительный знак, следовательно, поворот осей осуществляется против часовой стрелки.

Находим величину главных центральных моментов инерции составного сечения, используя следующую формулу

$$J_{\max}^{\min} = \frac{J_Y + J_X}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_Y - J_X)^2 + 4D_{YX}^2};$$

$$J_{\max} = J_V = \frac{265,01 + 1212,18}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(265,01 - 1212,18)^2 + 4 \times (-262,06)^2} = \\ = 738,60 + 541,26 = 1279,86 \text{ см}^4;$$

$$J_{\min} = J_U = \frac{265,01 + 1212,18}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(265,01 - 1212,18)^2 + 4 \times (-262,06)^2} = \\ = 738,60 - 541,26 = 197,34 \text{ см}^4.$$

Проверяем правильность вычисления главных моментов инерции сечения. Первая проверка основана на свойстве инвариантности суммы осевых моментов инерции, которое гласит, что сумма осевых моментов инерции при повороте центральных осей не изменяется:

$$J_Y + J_X = J_V + J_U;$$

$$265,01 + 1212,18 = 1279,86 + 197,34;$$

$$1477,19 \text{ см}^4 \approx 1477,20 \text{ см}^4.$$

Вторая проверка основана на следующем свойстве главных центральных осей инерции сечения: центробежный момент инерции относительно главных центральных осей равен:

$$\begin{aligned}
 D_{UV} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2\alpha + D_{yx} \cos 2\alpha = \\
 &= \frac{1212,18 - 265,01}{2} \times \sin 28,96^\circ + (-262,06) \times \cos 28,96^\circ = \\
 &= 229,31 - 229,29 = 0,02 \text{ см}^4 \approx 0,
 \end{aligned}$$

следовательно, величина главных центральных моментов инерции сечения определена верно.

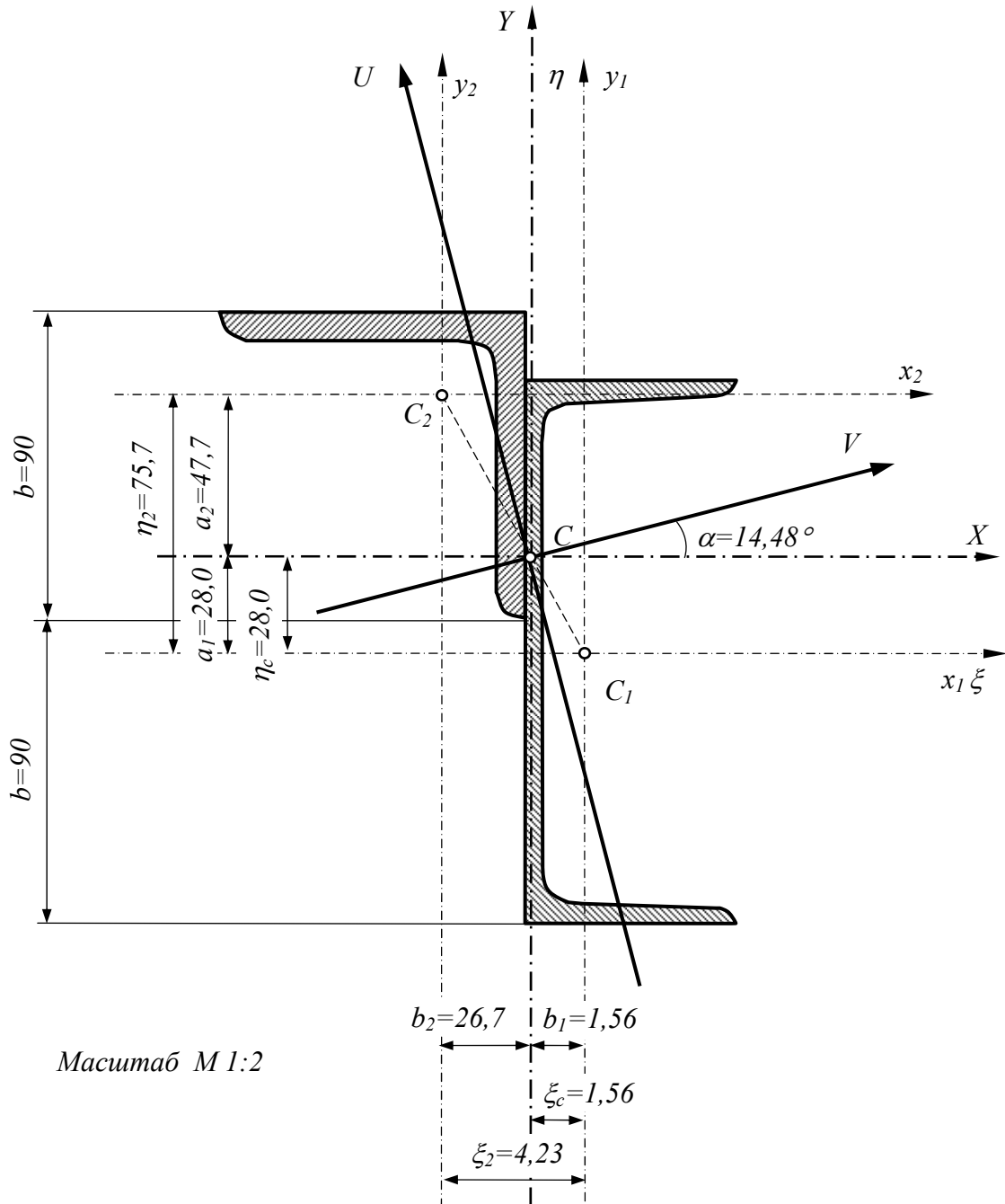


Рисунок 1

ЗАДАЧА № 2

РАСЧЕТ СТУПЕНЧАТОГО СТЕРЖНЯ НА ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

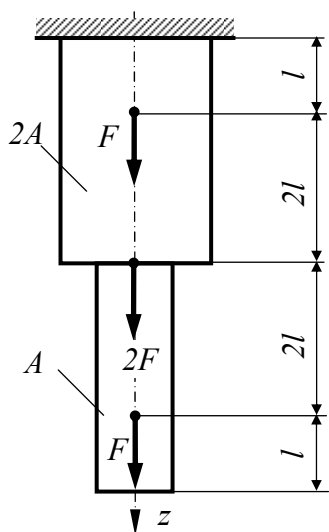


Рисунок 2

Для заданного статически определимого ступенчатого стержня (рис. 2) требуется:

- 1) построить эпюру продольных сил;
- 2) из условия прочности подобрать площади поперечных сечений стержня;
- 3) построить эпюру нормальных напряжений в поперечных сечениях стержня;
- 4) построить эпюру перемещений.

Исходные данные для решения задачи: материал стержня – сталь; внешние продольные силы – $F = 30$ кН; длины участков стержня – $l = 1$ м; расчетное сопротивление стали при растяжении и сжатии $R = 160$ МПа; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

В защемлении в общем случае возникает три реакции связи – вертикальная и горизонтальная опорные реакции и момент защемления. В данном случае стержень нагружен только осевыми силами и поэтому в защемлении возникает только вертикальная опорная реакция V . Величину указанной опорной реакции определим из уравнения статического равновесия:

$$\sum z = 0; \quad 2F + F + F - V = 0,$$

следовательно,

$$V = 4F = 120 \text{ кН.}$$

Рассматриваемый стержень состоит из пяти участков, границами которых являются сечения, где приложены внешние силы и места изменения размеров поперечного сечения. Проводим произвольные сечения в пределах каждого участка стержня. Рассматривая верхнюю отсеченную часть, составляем уравнения равновесия оставшейся части, откуда определяем величины продольных сил:

$$\begin{aligned} \sum z &= 0; \\ 0 \leq z_1 \leq l; & \quad N_1 = V = 120 \text{ кН}; \\ l \leq z_2 \leq 3l; & \quad N_2 = V - F = 120 - 30 = 90 \text{ кН}; \\ 3l \leq z_3 \leq 5l; & \quad N_3 = V - F - 2F = 30 \text{ кН}; \\ 5l \leq z_4 \leq 6l; & \quad N_4 = V - F - 2F - F = 0 \text{ кН}. \end{aligned}$$

По полученным значениям строим эпюру продольных сил N (рис. 3).

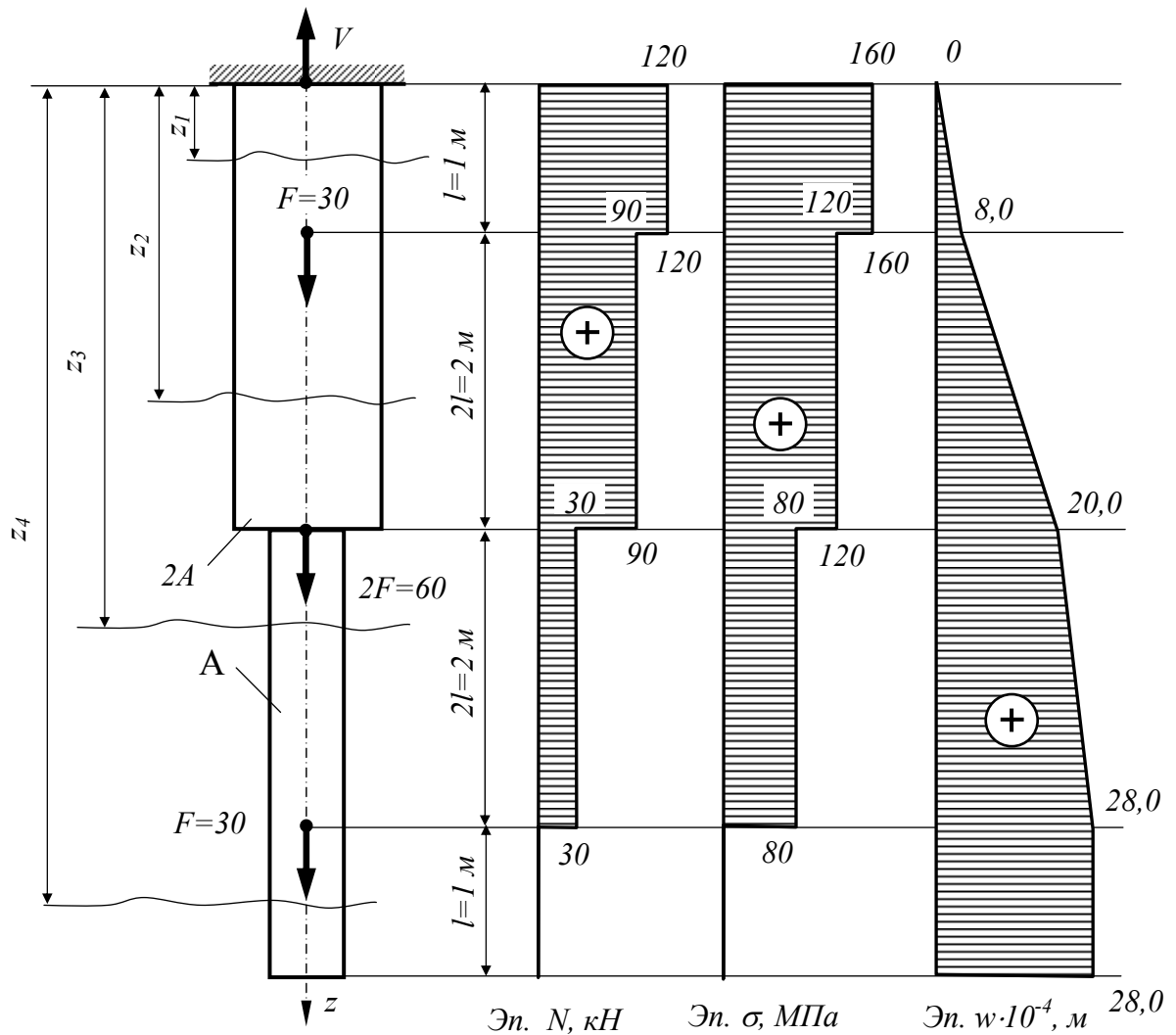


Рисунок 3

Для определения опасного сечения проанализируем напряжения на каждом участке:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{120}{2A} = \frac{60}{A} \text{ МПа};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{90}{2A} = \frac{45}{A} \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{30}{A} = \frac{30}{A} \text{ МПа};$$

$$\sigma_4 = \frac{N_4}{A} = 0 \text{ МПа}.$$

Наибольшее напряжение возникает на первом участке. Определим необходимые размеры поперечного сечения стержня исходя из условия прочности при одноосном растяжении:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{60}{A} \leq R = 160 \text{ МПа},$$

следовательно,

$$F \geq \frac{N_1}{R} = \frac{60 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 3,75 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 3,75 \text{ см}^2.$$

Определяем напряжения на каждом участке стержня:

$$0 \leq z_1 \leq l; \quad \sigma_1 = \frac{N_1}{2A} = \frac{120 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,75 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа};$$

$$l \leq z_2 \leq 3l; \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{90 \cdot 10^3}{2 \cdot 3,75 \cdot 10^{-4}} = 120 \text{ МПа};$$

$$3l \leq z_3 \leq 5l; \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{30 \cdot 10^3}{3,75 \cdot 10^{-4}} = 80 \text{ МПа};$$

$$5l \leq z_4 \leq 6l; \quad \sigma_4 = \frac{N_4}{A} = 0 \text{ МПа}.$$

По полученным значениям строим эпюру нормальных напряжений σ (рис. 3).

Построение эпюры перемещений начинаем от заделки, так как перемещение в заземлении заведомо известно и равно нулю. Перемещение определяем по закону Гука и на каждом из участков стержня соответственно равны (при $E = 2 \cdot 10^5$ МПа):

$$\text{первый участок: } 0 \leq z_1 \leq l; \quad w_1 = \frac{N_1 z_1}{E2A};$$

$$z_1 = 0; \quad w_1 = 0;$$

$$z_1 = l; \quad w_1 = 0 + \frac{120 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3,75 \cdot 10^{-4}} = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\text{второй участок: } l \leq z_2 \leq 3l; \quad w_2 = 8,0 \cdot 10^{-4} + \frac{N_2(z_2 - l)}{E2A};$$

$$z_2 = l; \quad w_2 = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$z_2 = 3l; \quad w_2 = 8,0 \cdot 10^{-4} + \frac{90 \cdot 10^3 \cdot (3 \cdot 1,0 - 1,0)}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 3,75 \cdot 10^{-4}} = 20,0 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\text{третий участок: } 3l \leq z_3 \leq 5l; \quad w_3 = 20,0 \cdot 10^{-4} + \frac{N_3(z_3 - 3l)}{EA};$$

$$z_3 = 3l; \quad w_3 = 20,0 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$z_3 = 5l; \quad z_3 = 20,0 \cdot 10^{-4} + \frac{30 \cdot 10^3 \cdot (5 \cdot 1,0 - 3 \cdot 1,0)}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,75 \cdot 10^{-4}} = 28,0 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$\text{четвертый участок: } 5l \leq z_4 \leq 6l; \quad w_4 = 28,0 \cdot 10^{-4} + \frac{N_4(z_4 - 5l)}{EA};$$

$$z_4 = 5l; \quad w_4 = 28,0 \cdot 10^{-4} \text{ м};$$

$$z_4 = 6l; \quad w_4 = 28,0 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

По полученным данным строим эпюру перемещений w (рис. 3).

ЗАДАЧА № 3

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Абсолютно жесткий брус опирается на шарнирно неподвижную опору и прикреплен к двум стержням с помощью шарниров. Требуется:

- б) найти усилия и напряжения в стержнях, выразив их через силу Q ;
- 7) найти допускаемую нагрузку $Q_{дон}$, приравняв большее из напряжений в двух стержнях расчетному сопротивлению $R = 160 \text{ МПа}$;
- 8) найти предельную грузоподъемность системы Q_m и допускаемую нагрузку $Q_{дон}$, если предел текучести $\sigma_m = 240 \text{ МПа}$ и коэффициент запаса прочности $k = 1,5$;
- 9) сравнить величины $Q_{дон}$, полученные из расчета по допускаемым напряжениям и допускаемым нагрузкам.

Исходные данные для решения задачи: схема стержневой системы показана на рис. 4; площадь поперечного сечения – $A = 17 \text{ см}^2$; линейные размеры – $a = 2,2 \text{ м}$, $b = 2,5 \text{ м}$, $c = 1,7 \text{ м}$,

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

При действии на стержневую систему внешней силы Q абсолютно жесткий брус повернется по часовой стрелке относительно точки A , что вызовет

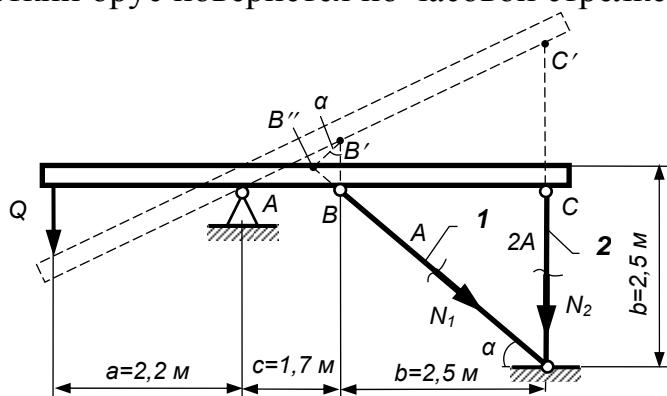


Рисунок 4

удлинение стержней 1 и 2. Деформация стержней приводит к возникновению в них продольных усилий N_1 и N_2 . Помимо этих усилий к системе приложены две опорные реакции, возникающие в шарнирно неподвижной опоре A . На плоскости можно составить только три независимых уравнения статики. Сле-

довательно, общее число неизвестных усилий на единицу превышает количество уравнений статики и система является статически неопределимой.

Для определения усилий в стержнях заданной системы рассмотрим три стороны задачи: статическую, геометрическую и физическую.

1) Статическая сторона задачи. Составим уравнение суммы моментов всех сил, действующих на систему, относительно неподвижной точки A

$$\sum m_A = 0; \quad N_1 \cdot \sin \alpha \cdot c + N_2 \cdot (b + c) - Q \cdot a = 0.$$

Полученное уравнение содержит два неизвестных продольных усилия, возникающих в стержнях системы, N_1 и N_2 .

2) Геометрическая сторона задачи. Рассмотрим деформированное состояние системы, как показано на рисунке. Под действием силы Q абсолютно жесткий брус занимает новое положение AC' . Стержни 1 и 2 получают удлинения Δl_1 и Δl_2 соответственно. Запишем уравнение, связывающее эти величины. В соответствии с чертежом $BB'' = \Delta l_1$ и $CC' = \Delta l_2$. Из прямоугольного треугольника $\Delta BB'B''$ получаем, что $BB' = \Delta l_1 / \sin \alpha$. Здесь угол $\alpha = 45^\circ$.

Из подобия треугольников $\Delta ABB'$ и $\Delta ACC'$ следует

$$\frac{BB'}{AB} = \frac{CC'}{AC} \quad \text{или} \quad = \frac{\Delta l_1}{c \cdot \sin \alpha} = \frac{\Delta l_2}{(b + c)}$$

3) Физическая сторона задачи. Воспользовавшись законом Гука, запишем выражения для удлинений стержней Δl_1 и Δl_2 :

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A \cdot \sin \alpha} \quad \text{и} \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение геометрической стороны задачи, получаем

$$\frac{N_1 \cdot b}{E \cdot A \cdot c \cdot \sin^2 \alpha} = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot 2A \cdot (b + c)}.$$

Тогда

$$N_1 = \frac{N_2 \cdot c \cdot \sin^2 \alpha}{2 \cdot (b + c)} = \frac{N_2 \cdot 1,7 \cdot 0,7071^2}{2 \cdot (2,5 + 1,7)} = 0,1012 N_2.$$

Подставляя полученное соотношение в уравнение статики, имеем:

$$0,1012 N_2 \cdot 0,7071 \cdot 1,7 + N_2 \cdot (2,5 + 1,7) - Q \cdot 2,2 = 0;$$

$$4,322 \cdot N_2 - 2,2 \cdot Q = 0.$$

$$N_2 = \frac{2,2 \cdot Q}{4,322} = 0,509Q \quad \text{и} \quad N_1 = 0,1012 N_2 = 0,1012 \cdot 0,509Q = 0,0515Q.$$

Вычисляем нормальные напряжения в стержнях системы

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0,0515Q}{A} = \frac{0,0515Q}{17 \cdot 10^{-4}} = 30,30Q;$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{0,509Q}{2A} = \frac{0,2445Q}{A} = \frac{0,2445Q}{17 \cdot 10^{-4}} = 149,71Q.$$

Находим допускаемую нагрузку на систему, приравнивая большее из двух полученных напряжений в стержнях величине расчетного сопротивления $R = 160$ МПа. Из условия прочности следует

$$\sigma_{\max} = \sigma_2 = 149,71Q \leq R = 160 \text{ МПа.}$$

Откуда

$$Q_{\text{дон}} \leq \frac{R}{149,71} = \frac{160 \cdot 10^6}{149,71} = 1068,76 \cdot 10^3 \text{ Н} = 1068,76 \text{ кН.}$$

Определим несущую способность системы Q_m из расчета по разрушающим нагрузкам. Предельное состояние стержневой системы будет достигнуто тогда, когда напряжения в обоих ее стержнях достигнут предела текучести материала $\sigma_y = 240$ МПа. Тогда, из статической стороны задачи получаем

$$\begin{aligned} \sigma_y \cdot F_1 \cdot \sin \alpha \cdot c + \sigma_y \cdot F_2 \cdot (b + c) - Q \cdot a &= 0, \\ \sigma_y \cdot F \cdot \sin \alpha \cdot c + \sigma_y \cdot 2F \cdot (b + c) - Q \cdot a &= 0, \\ Q_y = \frac{\sigma_y \cdot F(c \cdot \sin \alpha + 2(b + c))}{a} &= \frac{240 \cdot 10^6 \cdot 17 \cdot 10^{-4} \cdot (1,7 \cdot 0,7071 + 2 \cdot (2,5 + 1,7))}{2,2} = \\ &= 1780747,5 \text{ Н} = 1780,75 \text{ кН.} \end{aligned}$$

При заданной величине коэффициента запаса прочности допускаемая нагрузка будет равна

$$Q'_{\text{дон}} = \frac{Q_y}{k} = \frac{1780,75}{1,5} = 1187,17 \text{ кН.}$$

Следовательно, величина допускаемой нагрузки $Q'_{\text{дон}}$, полученной из расчета по разрушающим нагрузкам, больше величины $Q_{\text{дон}}$, полученной из расчета по допускаемым напряжениям в

$$\frac{Q'_{\text{дон}}}{Q_{\text{дон}}} = \frac{1187,17}{1068,76} = 1,111 \text{ раза.}$$

ЗАДАЧА №4

КРУЧЕНИЕ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

К стальному валу приложены три известных момента M_1 , M_2 и M_3 .

Требуется:

- 1) установить, при каком значении момента X угол поворота правого концевого сечения вала равен нулю;
- 2) для найденного значения момента X построить эпюру крутящих моментов;
- 3) при заданном значении R_s определить диаметр вала из расчета на прочность и округлить его до ближайшего большего, равного 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 4) построить эпюру углов закручивания;
- 5) найти наибольший относительный угол закручивания (на 1 м длины).

Исходные данные для решения задачи: схема вала показана на рис. 5, линейные размеры вала – $a=2,0$ м; $b=1,6$ м; $c=1,3$ м; значения внешних моментов – $M_1=2000$ Нм; $M_2=600$ Нм; $M_3=1300$ Нм; расчетное сопротивление срезу $R_s=45$ МПа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Угол закручивания на каждом грузовом участке вала определяется по следующей формуле

$$\varphi_i = \frac{M_{кр i} l_i}{GJ_\rho}, \quad (1)$$

где $M_{кр i}$ – крутящий момент на i – м грузовом участке;

l_i – длина i – го грузового участка;

G – модуль сдвига материала вала;

J_ρ – полярный момент инерции вала круглого поперечного сечения.

Запишем выражения для крутящих моментов на каждом грузовом участке через величины M_1 , M_2 , M_3 , и X :

$$M_{кр4} = X; \quad M_{кр3} = X + M_3; \quad M_{кр2} = X + M_3 - M_2; \quad M_{кр1} = X + M_3 - M_2 + M_1.$$

Подставив полученные величины в выражение (1) и используя условие задачи, получим следующее значение неизвестного момента, приложенного к правому концу вала:

$$\frac{(X + M_3 - M_2 + M_1) \cdot a}{GJ_\rho} + \frac{(X + M_3 - M_2) \cdot b}{GJ_\rho} + \frac{(X + M_3) \cdot c}{GJ_\rho} + \frac{X \cdot a}{GJ_\rho} = 0;$$

$$X(2a + b + c) + M_3(a + b + c) - M_2(a + b) + M_1 a = 0;$$

$$X = \frac{-M_3(a+b+c) + M_2(a+b) - M_1a}{2a+b+c} =$$

$$= \frac{-1300 \cdot (2,0+1,6+1,3) + 600 \cdot (2,0+1,6) - 2000 \cdot 2,0}{2 \cdot 2,0+1,6+1,3} = -1189,86 \text{ Нм.}$$

Используя выражения для крутящих моментов на каждом грузовом участке и полученное значение момента X , вычислим величины крутящих моментов на границах участков:

$$M_{кр4} = X = -1189,86 \text{ Нм}; M_{кр3} = X + M_3 = -1189,86 + 1300 = 110,14 \text{ Нм};$$

$$M_{кр2} = X + M_3 - M_2 = -1189,86 + 1300 - 600 = -489,86 \text{ Нм};$$

$$M_{кр1} = X + M_3 + M_2 - M_1 = -1189,86 + 1300 - 600 + 2000 = 1510,14 \text{ Нм.}$$

По полученным данным строим эпюру $M_{кр}$

Запишем условие прочности вала при кручении:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{кр \max}}{W_{\rho}} \leq R_s, \quad (2)$$

где $M_{кр \max}$ – максимальное значение крутящего момента;

W_{ρ} – полярный момент сопротивления сечения вала.

Полярный момент сопротивления круглого поперечного сечения определяется по формуле:

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (3)$$

здесь d – диаметр вала.

Тогда, используя выражения (2) и (3), получаем

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{кр \max}}{\pi \cdot R_s}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1510,14}{3,14 \cdot 45 \cdot 10^6}} = 0,0555 \text{ м.}$$

Окончательно принимаем диаметр вала $d = 60$ мм.

Находим значение полярного момента инерции поперечного сечения вала по формуле

$$J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot (6 \cdot 10^{-2})^4}{32} = 1,271 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Используя формулу (1) и принимая величину модуля сдвига стали равной $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, вычисляем величину углов закручивания на каждом грузовом участке

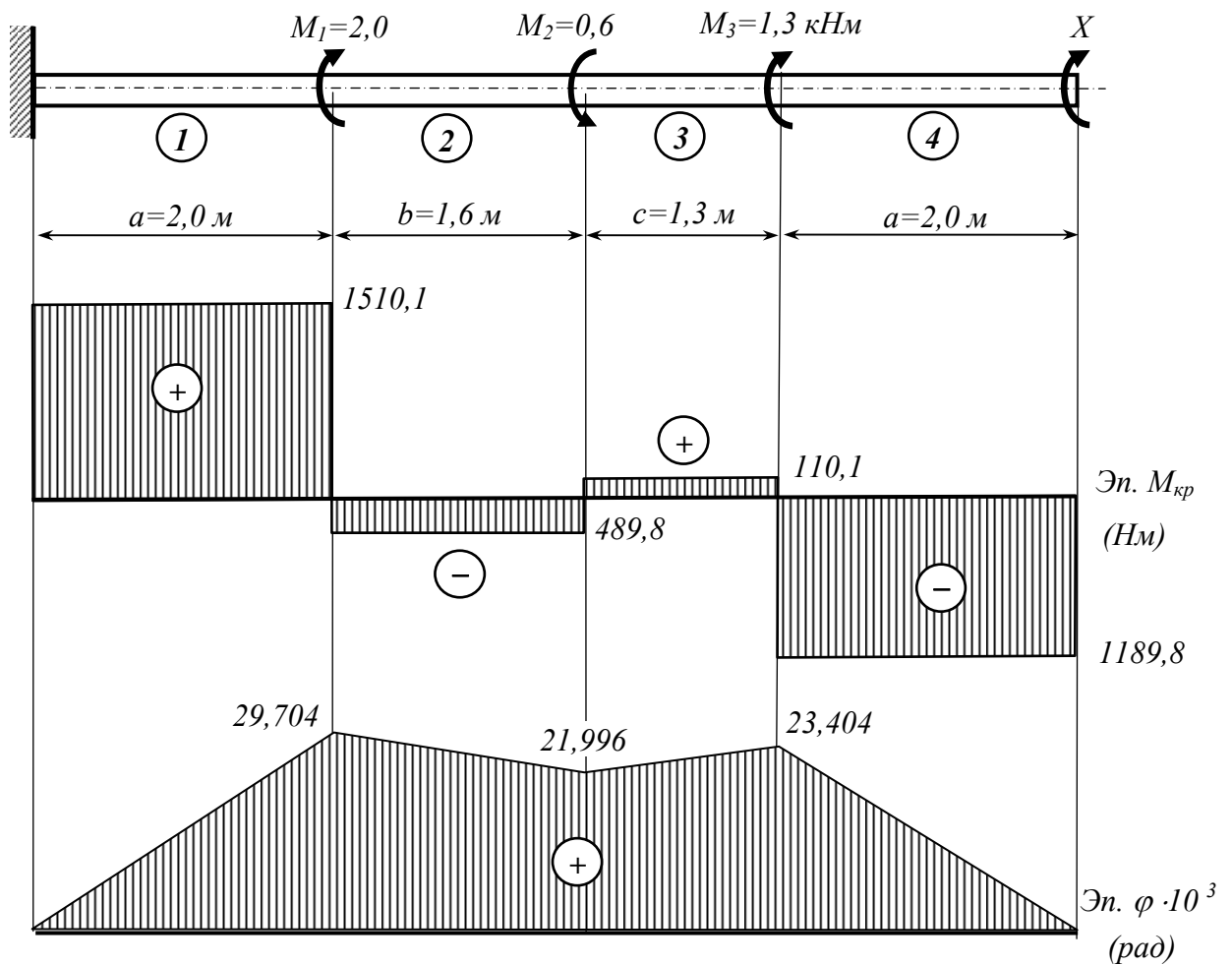


Рисунок 5

$$\varphi_4 = \frac{-1189,86 \cdot 2,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = -23,404 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \frac{110,14 \cdot 1,3}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = 1,408 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \frac{-489,86 \cdot 1,6}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = -7,708 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_1 = \frac{1510,14 \cdot 2,0}{8 \cdot 10^{10} \cdot 1,271 \cdot 10^{-6}} = 29,704 \cdot 10^{-3} \text{ рад}.$$

Определяем ординаты эпюры углов закручивания

$$\varphi_{A-1} = \varphi_1 = 29,707 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{A-2} = \varphi_1 + \varphi_2 = (29,707 - 7,708) \cdot 10^{-3} = 21,996 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{A-3} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = (29,707 - 7,708 + 1,408) \cdot 10^{-3} = 23,404 \cdot 10^{-3} \text{ рад};$$

$$\varphi_{A-4} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = (29,707 - 7,708 + 1,408 - 23,404) \cdot 10^{-3} = 0,$$

что соответствует условию задачи.

По полученным значениям строим эпюру углов закручивания вала φ .

Исходя из построенной эпюры φ , определяем наибольший относительный угол закручивания на 1 м его длины

$$\psi = \frac{\varphi_{\max}}{l} = \frac{29,704 \cdot 10^{-3}}{2,0} = 14,852 \cdot 10^{-3} \text{ рад/м.}$$

ЗАДАЧА №4

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ТОЧКЕ ТЕЛА

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Стальной кубик находится под действием сил, создающих плоское напряженное состояние (одно из трех главных напряжений равно нулю). Требуется найти:

- 1) главные напряжения и направление главных площадок;
- 2) максимальные касательные напряжения, равные наибольшей полуразности главных напряжений;
- 3) относительные деформации ε_x , ε_y , ε_z ;
- 4) относительное изменение объема;
- 5) удельную потенциальную энергию деформаций.

Исходные данные для решения задачи: схема кубика показана на рис. 6. Заданные напряжения: $\sigma_x = 10$ МПа, $\sigma_y = 100$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определяем величины главных напряжений по формуле:

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \right].$$

При вычислении главных напряжений в соответствии с заданной схемой загрузки кубика имеем: $\sigma_x = -10$ МПа, $\sigma_y = 100$ МПа, $\tau_{xy} = 20$ МПа, тогда

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} \left[(-10 + 100) \pm \sqrt{(-10 - 100)^2 + 4 \cdot 20^2} \right] = \frac{1}{2} (90 \pm 117,05);$$

$$\sigma_1 = 103,52 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = -13,52 \text{ МПа.}$$

Сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, есть величина инвариантная, т.е. не зависящая от поворота координатных осей относительно неподвижной точки. Восполь-

зовавшись этим свойством, выполним проверку найденных значений главных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= \sigma_1 + \sigma_2; \\ -10 + 100 &= 103,52 - 13,52; \\ 90 \text{ МПа} &= 90 \text{ МПа},\end{aligned}$$

следовательно, величины главных напряжений вычислены верно.

Вычисляем величину угла наклона главных площадок относительно заданных площадок

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 20}{-10 - 100} = -0,3636; \quad 2\alpha = -19,98^\circ; \quad \alpha = -9,99^\circ.$$

Знак «минус» указывает на то, что поворот осей до положения главных на угол α осуществляется по часовой стрелке.

Максимальные касательные напряжения вычисляем по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{103,52 + 13,52}{2} = 58,52 \text{ МПа}.$$

Площадки, по которым действуют максимальные касательные напряжения, направлены под углом 45° относительно положения главных площадок.

Определяем относительные деформации в точке тела ε_x , ε_y и ε_z , воспользовавшись обобщенным законом Гука и учитывая, что $\sigma_z = 0$:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x), \\ \varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \end{cases}$$

где E – модуль упругости первого рода, для стали $E = 2 \cdot 10^5$ МПа;

μ – коэффициент Пуассона, для стали принимаем значение $\mu = 0,3$.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \cdot (-10 - 0,3 \cdot 100) \cdot 10^6 = -20 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{2 \cdot 10^{11}} \cdot (100 + 0,3 \cdot 10) \cdot 10^6 = 65 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_z = -\frac{0,3}{2 \cdot 10^{11}} \cdot (-10 + 100) \cdot 10^6 = -13,5 \cdot 10^{-5}.$$

Определяем относительное изменение объема по формуле:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (-20 + 65 - 13,5) \cdot 10^{-5} = 31,5 \cdot 10^{-5}$$

Вычисляем удельную потенциальную энергию деформаций через главные напряжения

$$U = \frac{1}{2E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu\sigma_1\sigma_2) =$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}(103,52^2 + 13,52^2 + 2 \cdot 0,3 \cdot 103,52 \cdot 13,52) \cdot 10^6 = 29,35 \cdot 10^{-3} \frac{НМ}{м^3}.$$

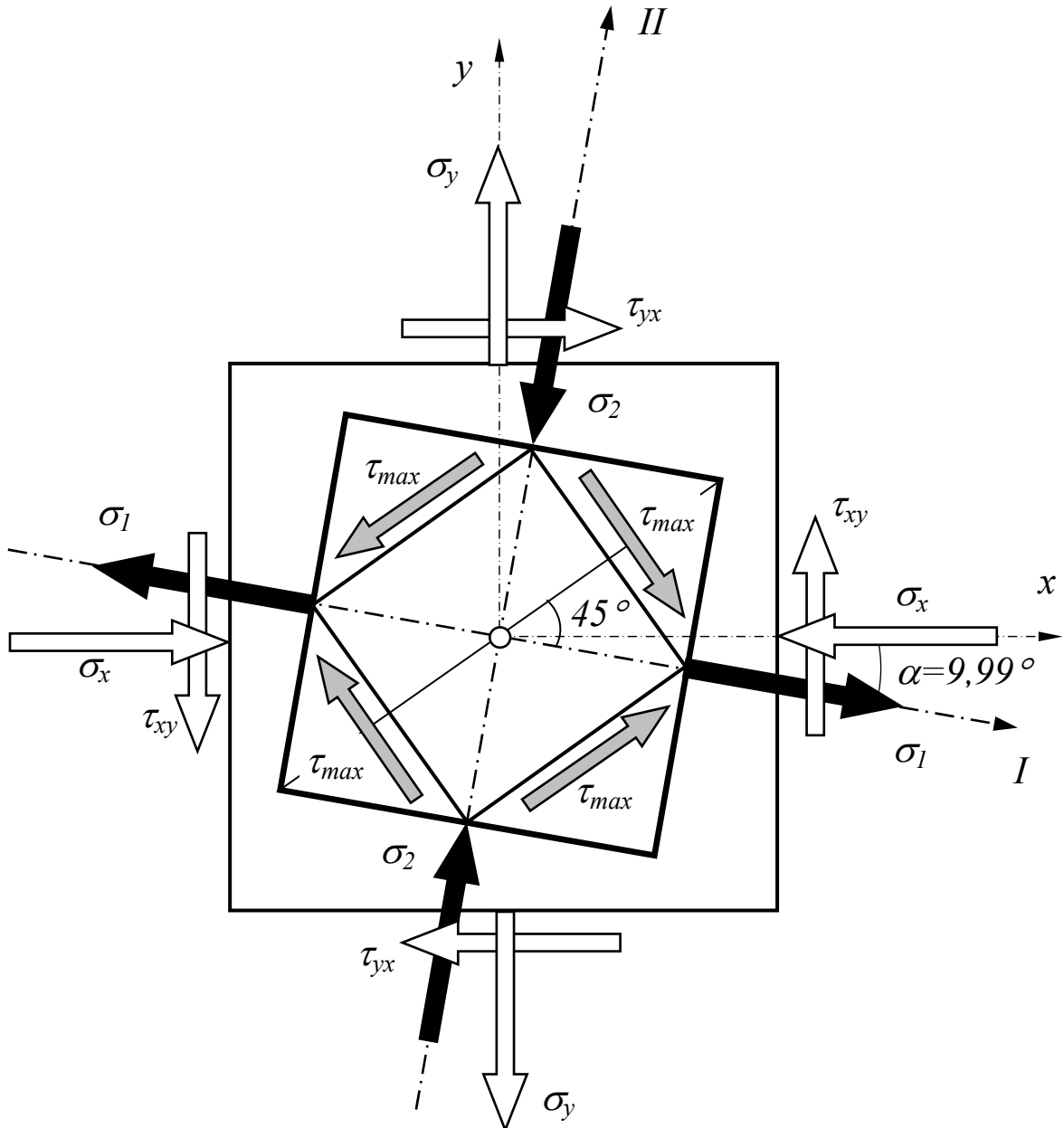


Рисунок 6

ЗАДАЧА № 6

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ ПЛОСКОМ ИЗГИБЕ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Для двух заданных схем требуется написать выражения Q и M для каждого участка в общем виде, построить эпюры Q и M , найти M_{max} и подобрать:

- для схемы a – деревянную балку круглого поперечного сечения при $R = 8$ МПа;
- для схемы b – стальную балку двутаврового поперечного сечения при $R = 160$ МПа.

Исходные данные для решения задачи : $l_1 = 1,5$ м; $l_2 = 7$ м; $a_1/a = 2$; $a_2/a = 5$; $a_3/a = 2$; $M = 20$ кНм; $P = 5$ кН; $q = 7$ кН/м.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Схема a (рис. 7).

Разбиваем балку на грузовые участки. В пределах каждого участка проводим сечение и отбрасываем левую часть балки. В поперечном сечении показываем внутренние силовые факторы в положительном направлении. Поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_x определяем их уравнений равновесия, составленных для правой части балки.

Первый участок: $0 \leq z_1 \leq 0,75$ м.

$$\sum y = 0; Q_y - q \cdot z_1 = 0; Q_y = q \cdot z_1;$$

$$\sum m = 0; M_x + q \cdot z_1^2 / 2 = 0; M_x = -q \cdot z_1^2 / 2;$$

При $z_1 = 0$; $Q_y = 0$; $M_x = 0$.

При $z_1 = 1,33$ м; $Q_y = 9,31$ кН; $M_x = -6,191$ кНм.

Второй участок: $0,75 \leq z_2 \leq 1,20$ м.

$$\sum y = 0; Q_y - q \cdot z_2 - P = 0; Q_y = q \cdot z_2 + P;$$

$$\sum m = 0; M_x + q \cdot 0,75 \cdot (z_2 - 0,75/2) + P \cdot (z_2 - 1,20) = 0;$$

$$M_x = -q \cdot 0,75 \cdot (z_2 - 0,75/2) - P \cdot (z_2 - 1,20);$$

При $z_2 = 1,33$; $Q_y = 18,31$ кН; $M_x = -6,191$ кНм.

При $z_2 = 1,71$ м; $Q_y = 20,97$ кН; $M_x = -13,652$ кНм.

Третий участок: $1,20 \leq z_3 \leq 1,50$ м.

$$\sum y = 0; Q_y - q \cdot 0,75 - P = 0; Q_y = q \cdot 0,75 + P = 10,25 \text{ кН};$$

$$\sum m = 0; M_x + q \cdot 0,75 \cdot (z_3 - 0,75/2) + P \cdot (z_3 - 1,20) = 0;$$

$$M_x = -q \cdot 0,75 \cdot (z_3 - 0,75/2) - P \cdot (z_3 - 1,20);$$

При $z_3 = 1,20$ м; $Q_y = 10,25$ кН; $M_x = -4,331$ кНм.

При $z_3 = 1,50$ м; $Q_y = 10,25$ кН; $M_x = -7,406$ кНм.

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x .

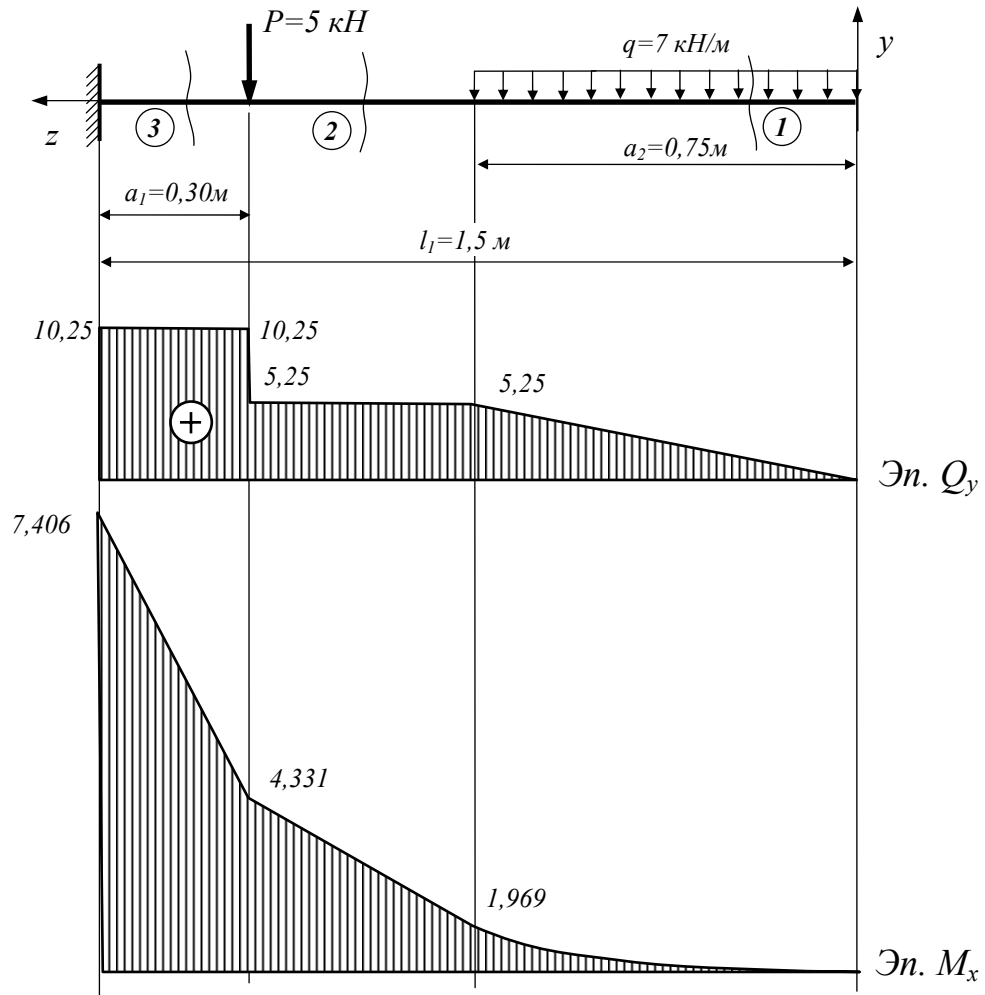


Рисунок 7

Запишем условие прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R = 8 \text{ МПа},$$

где M_{\max} – максимальный изгибающий момент, возникающий в балке;

W_x – момент сопротивления поперечного сечения балки.

Из записанного условия следует, что требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки определяется следующим образом

$$W_x \geq \frac{M_{\max}}{R}.$$

Для круглого поперечного сечения момент сопротивления равен

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32}.$$

Следовательно, необходимый диаметр поперечного сечения равен

$$d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\max}}{\pi R}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 7,406 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^6}} = 0,211 \text{ м.}$$

Схема б (рис. 8).

Определяем опорные реакции заданной балки.

$$\sum m_A = 0; q \cdot (1,4 + 3,5) \cdot \left(\frac{1,4 + 3,5}{2} - 1,4 \right) + M - R_B \cdot 7,0 = 0;$$

$$R_B = \frac{7 \cdot (1,4 + 3,5) \cdot \left(\frac{1,4 + 3,5}{2} - 1,4 \right) + 20}{7,0} = 8,0 \text{ кН};$$

$$\sum m_B = 0; q \cdot (1,4 + 3,5) \cdot \left(8,4 - \frac{1,4 + 3,5}{2} \right) - M - R_A \cdot 7,0;$$

$$R_A = \frac{7 \cdot (1,4 + 3,5) \cdot \left(8,4 - \frac{1,4 + 3,5}{2} \right) - 20}{7,0} = 26,3 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum y = 0; q \cdot (1,4 + 3,5) - R_A - R_B = 7 \cdot (1,4 + 3,5) - 26,3 - 8,0 = 34,3 - 34,3 = 0,$$

следовательно, опорные реакции вычислены верно.

Разбиваем балку на грузовые участки. В пределах каждого участка проводим сечение и отбрасываем правую часть балки. В поперечном сечении показываем внутренние силовые факторы в положительном направлении. Поперечную силу Q_y и изгибающий момент M_x определяем из уравнений равновесия, составленных для левой части балки.

Первый участок: $0 \leq z_1 \leq 1,40 \text{ м.}$

$$\sum y = 0; Q_y + q \cdot z_1 = 0; Q_y = -q \cdot z_1;$$

$$\sum m = 0; M_x + q \cdot z_1^2 / 2 = 0; M_x = -q \cdot z_1^2 / 2;$$

При $z_1 = 0; Q_y = 0; M_x = 0.$

При $z_1 = 1,40 \text{ м}; Q_y = -9,8 \text{ кН}; M_x = -6,86 \text{ кНм.}$

Второй участок: $1,40 \leq z_2 \leq 4,9$ м.

$$\sum y = 0; Q_y + q \cdot z_2 - R_A = 0; Q_y = R_A - q \cdot z_1;$$

$$\sum m = 0; M_x + q \cdot z_2^2 / 2 - R_A \cdot (z_2 - 1,4) = 0; M_x = R_A \cdot (z_2 - 1,4) - q \cdot z_2^2 / 2;$$

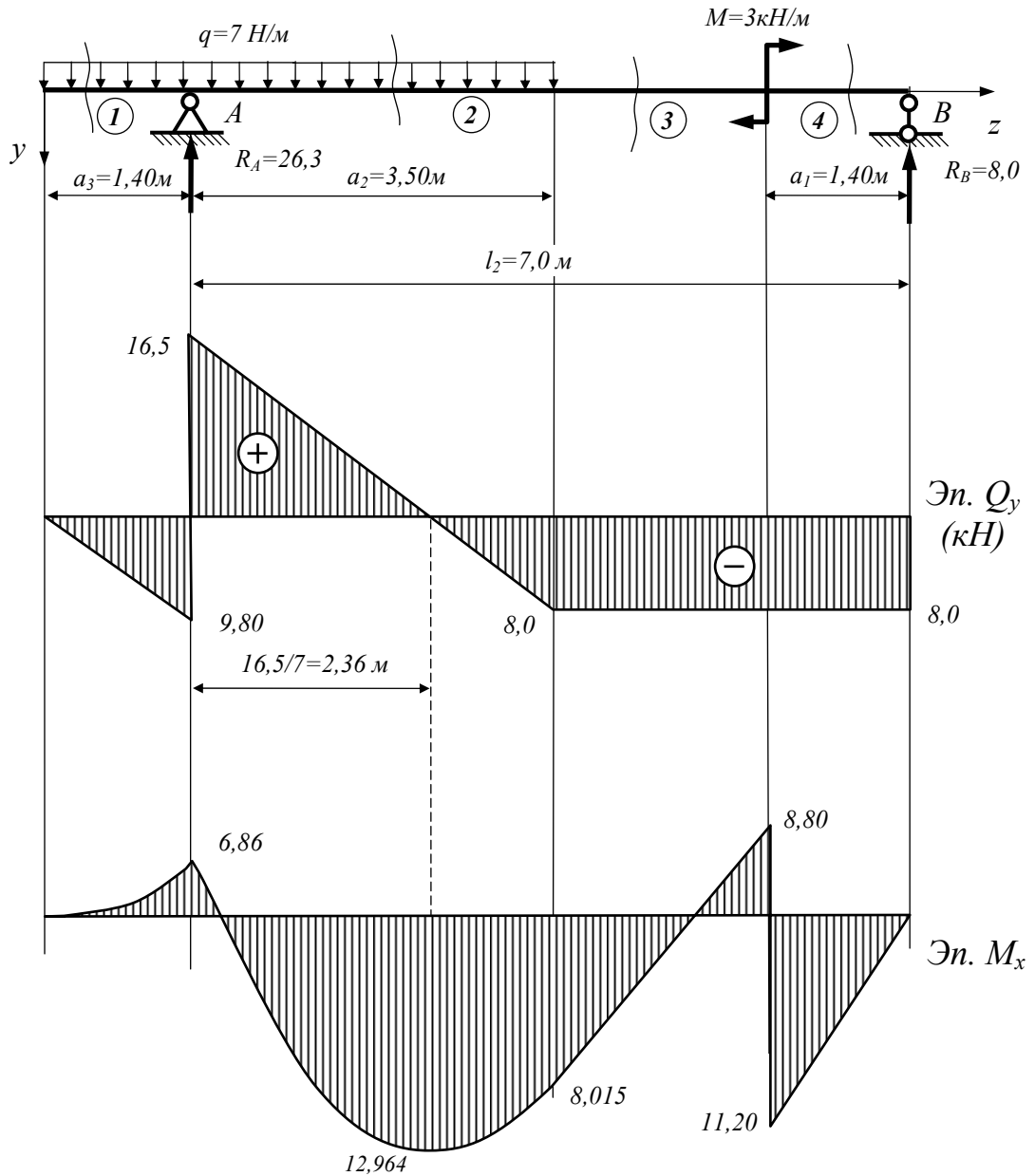


Рисунок 8

При $z_2 = 1,40$; $Q_y = 16,50$ кН; $M_x = -6,86$ кНм.

При $z_2 = 4,9$ м; $Q_y = -8,0$ кН; $M_x = 8,015$ кНм.

При $z_2 = 3,76$ м; $Q_y = 0$ кН; $M_x = 12,964$ кНм.

Для упрощения расчетов будем в дальнейшем отбрасывать левую часть балки. Третий участок: $1,40 \leq z_3 \leq 3,5$ м.

$$\sum y = 0; Q_y + R_B - q \cdot (z_3 - 1,4) = 0; Q_y = q \cdot (z_3 - 1,4) - R_B;$$

$$\sum m = 0; M_x + q \cdot (z_3 - 1,4)^2 / 2 - R_B \cdot z_3 = 0; M_x = R_B \cdot z_3 - q \cdot (z_3 - 1,4)^2 / 2.$$

При $z_3 = 1,40$ м; $Q_y = -8,0$ кН; $M_x = -8,80$ кНм.

При $z_3 = 3,50$ м; $Q_y = -8,0$ кН; $M_x = 8,015$ кНм.

Четвертый участок: $0 \leq z_4 \leq 1,40$ м.

$$\sum y = 0; Q_y + R_B = 0; Q_y = -R_B = -8,0 \text{ кН};$$

$$\sum m = 0; M_x - R_B \cdot z_4 = 0; M_x = R_B \cdot z_4.$$

При; $z_4 = 0$ м; $Q_y = -8,0$ кН; $M_x = 0$ кНм.

При $z_4 = 1,40$ м; $Q_y = -8,0$ кН; $M_x = 11,20$ кНм.

По полученным значениям строим эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x .

Запишем условие прочности при изгибе

$$\sigma = \frac{M_{max}}{W_x} \leq R = 160 \text{ МПа},$$

где M_{max} – максимальный изгибающий момент, возникающий в балке;

W_x – момент сопротивления поперечного сечения балки.

Из записанного условия следует, что требуемый момент сопротивления поперечного сечения балки определяется следующим образом

$$W_x^{mp} \geq \frac{M_{max}}{R} = \frac{12,964 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 81,03 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 81,03 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали (ГОСТ 8239-72) выбираем двутавровое сечение, у которого момент сопротивления больше требуемого значения. Окончательно принимаем двутавр №14 с $W_x = 81,9 \text{ см}^3$.

ЗАДАЧА № 7

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Для заданной статически неопределимой балки (рис. 9) требуется:

- 1) найти изгибающий момент на левой опоре (в долях ql^2);
- 2) построить эпюры поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x ;

3) построить эпюру прогибов заданной балки, вычислив три ординаты в пролете и две – на консоли.

Исходные данные задачи: параметры $\alpha = 0,2$ и $\beta = 0,5$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Заданная балка является статически неопределимой, так как в ее опорных устройствах возникают четыре неизвестные опорные реакции, а для плоскости можно составить только три независимых уравнения статики. Для раскрытия статической неопределимости отбрасываем правую опору балки (шарнирно подвижную опору в точке B) и определяем опорные реакции в защемлении A от действия внешних сил

$$\begin{aligned} \sum y &= 0; \quad q\beta l - P + R_A^* = 0; \\ R_A^* &= P - q\beta l = \alpha ql - q\beta l = ql(\alpha - \beta) = ql(0,2 - 0,5) = -0,3ql; \\ \sum m_A &= 0; \quad -q\beta l \cdot (l + \beta l / 2) + P \cdot l / 2 + M_A^* = 0; \\ M_A^* &= -P \cdot l / 2 + q\beta l \cdot (l + \beta l / 2) = -\alpha ql \cdot l / 2 + q\beta l \cdot (l + \beta l / 2) = \\ &= -0,2ql \cdot l / 2 + 0,5ql \cdot (l + 0,5l / 2) = 0,525ql^2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись уравнением метода начальных параметров, вычисляем прогиб балки в точке B от действия внешних сил.

$$EJ_x v_{(B)}^* = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} z_{(B)} + \frac{R_A^* z_{(B)}^3}{6} - \frac{M_A^* z_{(B)}^2}{2} + \frac{P(z_{(B)} - l/2)^3}{6}.$$

Начальные параметры задачи известны, так как в начале координат располагается жесткая заделка, препятствующая вертикальным перемещениям и углам поворота сечения, следовательно, $EJ_x v_{(0)} = 0$ и $EJ_x \theta_{(0)} = 0$. Тогда при $z_{(B)} = l$ получаем

$$EJ_x v_{(B)}^* = \frac{-0,3ql \cdot l^3}{6} + \frac{0,525ql^2 \cdot l^2}{2} - \frac{0,2ql \cdot (l - l/2)^3}{6} = 0,2083ql^4.$$

Отбрасываем все внешние нагрузки и загружаем полученную консольную балку сосредоточенной силой R_B , приложенной в точке B . Определяем опорные реакции в заделке от этого нагружения балки.

$$\begin{aligned} \sum y &= 0; \quad R_A^{**} - R_B = 0; \quad R_A^{**} = R_B; \\ \sum m_A &= 0; \quad M_A^{**} - R_B l = 0; \quad M_A^{**} = R_B l. \end{aligned}$$

Воспользовавшись уравнением метода начальных параметров, вычисляем прогиб балки в точке B от силы R_B .

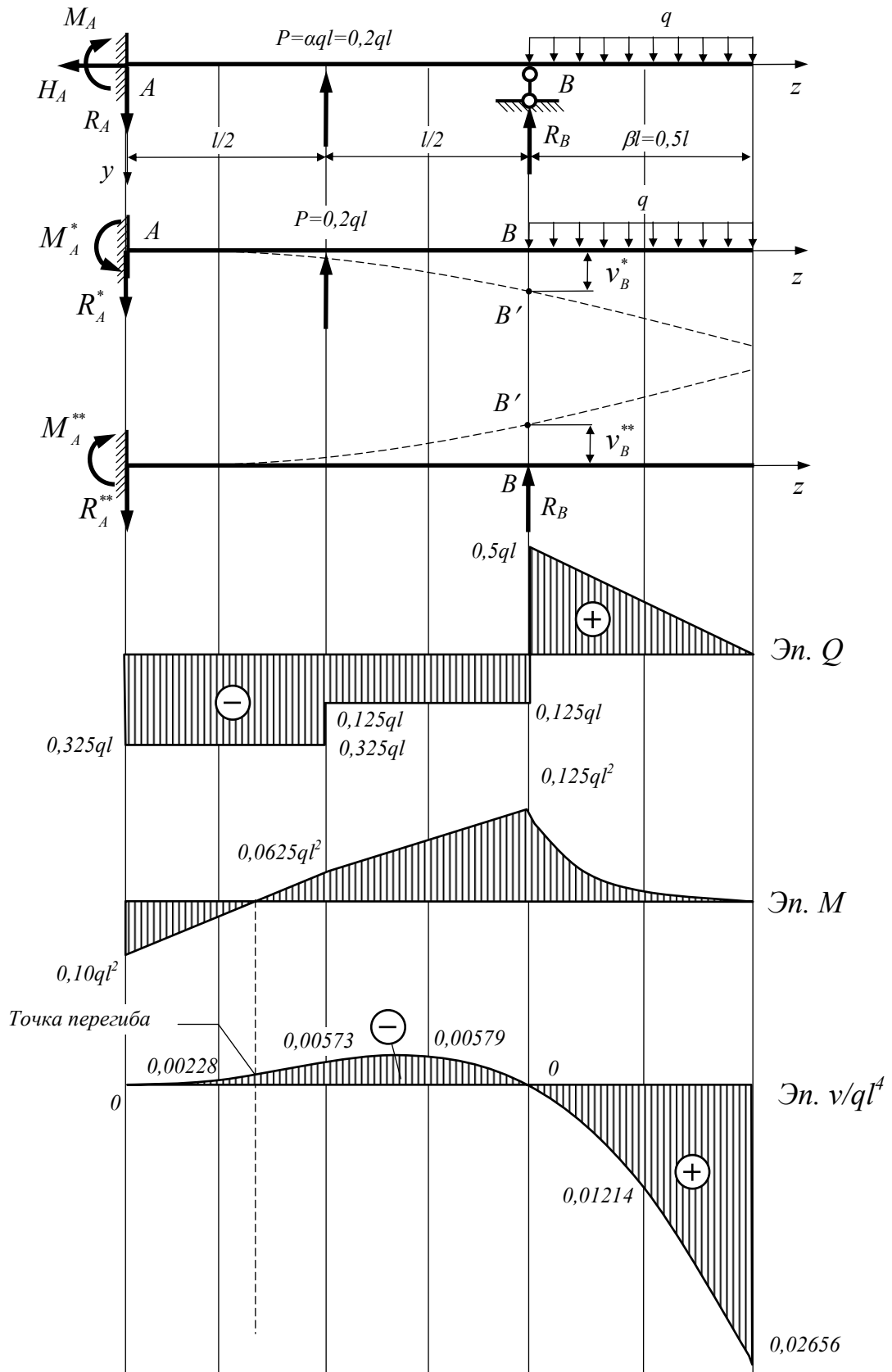


Рисунок 9

$$EJ_x v_{(B)}^{**} = EJ_x v_{(0)} + EJ_x \theta_{(0)} z_{(B)} + \frac{R_A^{**} z_{(B)}^3}{6} - \frac{M_A^{**} z_{(B)}^2}{2}.$$

Начальные параметры задачи $EJ_x v_{(0)} = 0$ и $EJ_x \theta_{(0)} = 0$, тогда при $z_{(B)} = l$ получаем

$$EJ_x v_{(B)}^{**} = \frac{R_B \cdot l^3}{6} - \frac{R_B l \cdot l^2}{2} = -\frac{R_B \cdot l^3}{3}.$$

Согласно условию задачи прогиб балки в точке B должен быть равен нулю, так как там установлена шарнирно подвижная опора, препятствующая вертикальным перемещениям. Отсюда получаем следующее уравнение

$$EJ_x v_{(B)}^{*} + EJ_x v_{(B)}^{**} = 0.$$

Тогда

$$0,2083ql^4 - \frac{R_B \cdot l^3}{3} = 0; \quad R_B = \frac{3 \cdot 0,2083ql^4}{l^3} = 0,625ql.$$

Таким образом, величина опорной реакции R_B определена. Остальные опорные реакции заданной балки от действия внешних нагрузок вычисляем, используя уравнения статики.

$$\sum y = 0; \quad q\beta l - P + R_A - R_B = 0;$$

$$\begin{aligned} R_A = R_B + (P - q\beta l) &= 0,625ql + (\alpha ql - q\beta l) = 0,625ql + ql(\alpha - \beta) = \\ &= 0,625ql + ql(0,2 - 0,5) = 0,325ql; \end{aligned}$$

$$\sum m_A = 0; \quad q\beta l \cdot (l + \beta l / 2) - P \cdot l / 2 + M_A - R_B \cdot l = 0;$$

$$\begin{aligned} M_A = R_B \cdot l - q\beta l \cdot (l + \beta l / 2) + P \cdot l / 2 &= 0,625ql \cdot l - q\beta l \cdot (l + \beta l / 2) + \alpha ql \cdot l / 2 = \\ &= 0,625ql^2 - q \cdot 0,2l \cdot (l + 0,5l / 2) + 0,2ql \cdot l / 2 = 0,10ql^2. \end{aligned}$$

Исходя из полученных величин опорных реакций, строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M в заданной балке.

Запишем уравнение метода начальных параметров для определения прогибов балки в любой ее точке.

$$EJ_x v_{(i)} = \frac{R_A z_{(i)}^3}{6} \Big|_0^{1,5l} - \frac{M_A z_{(i)}^2}{2} \Big|_0^{1,5l} - \frac{P(z_{(i)} - l/2)^3}{6} \Big|_{0,5l}^{1,5l} - \frac{R_B (z_{(i)} - l)^3}{6} \Big|_l^{1,5l} + \frac{q(z_{(i)} - l)^3}{24} \Big|_l^{1,5l}.$$

Исходя из записанного уравнения, вычисляем прогибы балки в ее расчетных сечениях:

$$z_{(1)} = 0,25l;$$

$$EJ_x v_{(1)} = \frac{0,325ql \cdot (0,25l)^3}{6} - \frac{0,10ql^2 \cdot (0,25l)^2}{2} = -0,00228ql^4;$$

$$z_{(2)} = 0,5l;$$

$$EJ_x v_{(2)} = \frac{0,325ql \cdot (0,5l)^3}{6} - \frac{0,10ql^2 \cdot (0,5l)^2}{2} = -0,00573ql^4;$$

$$z_{(3)} = 0,75l;$$

$$EJ_x v_{(3)} = \frac{0,325ql \cdot (0,75l)^3}{6} - \frac{0,10ql^2 \cdot (0,75l)^2}{2} - \frac{0,2ql \cdot (0,75l - 0,5l)^3}{6} = -0,00579ql^4;$$

$$z_{(4)} = l;$$

$$EJ_x v_{(4)} = \frac{0,325ql \cdot l^3}{6} - \frac{0,10ql^2 \cdot l^2}{2} - \frac{0,2ql \cdot (l - 0,5l)^3}{6} = 0;$$

$$z_{(5)} = 1,25l;$$

$$EJ_x v_{(5)} = \frac{0,325ql \cdot (1,25l)^3}{6} - \frac{0,10ql^2 \cdot (1,25l)^2}{2} - \frac{0,2ql \cdot (1,25l - 0,5l)^3}{6} - \frac{0,625ql \cdot (1,25l - l)^3}{6} + \frac{q \cdot (1,25l - l)^4}{24} = 0,01214ql^4;$$

$$z_{(6)} = 1,5l;$$

$$EJ_x v_{(6)} = \frac{0,325ql \cdot (1,5l)^3}{6} - \frac{0,10ql^2 \cdot (1,5l)^2}{2} - \frac{0,2ql \cdot (1,5l - 0,5l)^3}{6} - \frac{0,625ql \cdot (1,5l - l)^3}{6} + \frac{q \cdot (1,5l - l)^4}{24} = 0,02656ql^4.$$

По полученным значениям строим эпюру прогибов заданной балки (рис. 9). При построении эпюры прогибов ее очертания необходимо согласовать с эпюрой изгибающих моментов M_x . На каждом грузовом участке выпуклость эпюры v должна быть направлена в сторону растянутых волокон на эпюре M_x .

ЗАДАЧА № 8

КОСОЙ ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения загружена системой внешних сил, приложенных в вертикальной и горизонтальной плоскости (рис. 10). В опорных устройствах балки возникают реактивные усилия, действующие как на направлении оси x , так и оси y . Требуется:

- 1) показать расчетные схемы балки в вертикальной и горизонтальной плоскостях и построить эпюры изгибающих моментов M_x и M_y ;
- 2) установить положение опасного сечения балки;

- 3) из условия прочности при косом изгибе подобрать необходимые размеры поперечного сечения балки при заданном соотношении h/b при расчетном сопротивлении материала $R = 10$ МПа;
- 4) определить положение нейтральной линии в опасном сечении балки и построить для указанного сечения эпюру распределения нормальных напряжений в аксонометрии.

Исходные данные для решения задачи: внешние нагрузки $F_1 = 2,0$ кН; $F_2 = 2,0$ кН; $q_1 = 1,0$ кН/м; $q_2 = 1,5$ кН/м; размеры балки $a = 2$ м; $b = 1$ м; $c = 1$ м; соотношение размеров сечения $h/b = 2/1$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Вначале рассматриваем загрузку балки в вертикальной плоскости. Используя уравнения статики, определяем вертикальные опорные реакции:

$$\sum m_B = 0; V_A = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot 4^2 / 2}{4} = 2,5 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; V_B = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot 4^2 / 2}{4} = 3,5 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; V_A + V_B - q_1 \cdot 4 - F_2 = 0; 2,5 + 3,5 - 1 \cdot 4 - 2 = 6 - 6 = 0,$$

следовательно, опорные реакции, действующие в вертикальной плоскости найдены верно. По полученным значениям строим эпюру моментов M_x , изгибающих балку в вертикальной плоскости.

Аналогичным образом рассматриваем работу балки в горизонтальной плоскости. Используя уравнения статики, определяем горизонтальные опорные реакции:

$$\sum m_B = 0; H_A = \frac{2 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1^2 / 2}{4} = 1,188 \text{ кН};$$

$$\sum m_A = 0; H_B = \frac{2 \cdot 2 + 1,5 \cdot 1 \cdot 3,5}{4} = 2,312 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum x = 0; H_A + H_B - q_2 \cdot 1,5 - F_1 = 0; 1,188 + 2,312 - 1,5 \cdot 1 - 2 = 3,5 - 3,5 = 0,$$

следовательно, опорные реакции, действующие в горизонтальной плоскости найдены верно. По полученным значениям строим эпюру моментов M_y , изгибающих балку в горизонтальной плоскости.

Анализируя построенные эпюры (рис. 10), приходим к выводу, что опасное сечение балки расположено в точке C , где моменты M_x и M_y , изги-

бающие балку в вертикальной и горизонтальной плоскостях, достигают значительных величин.

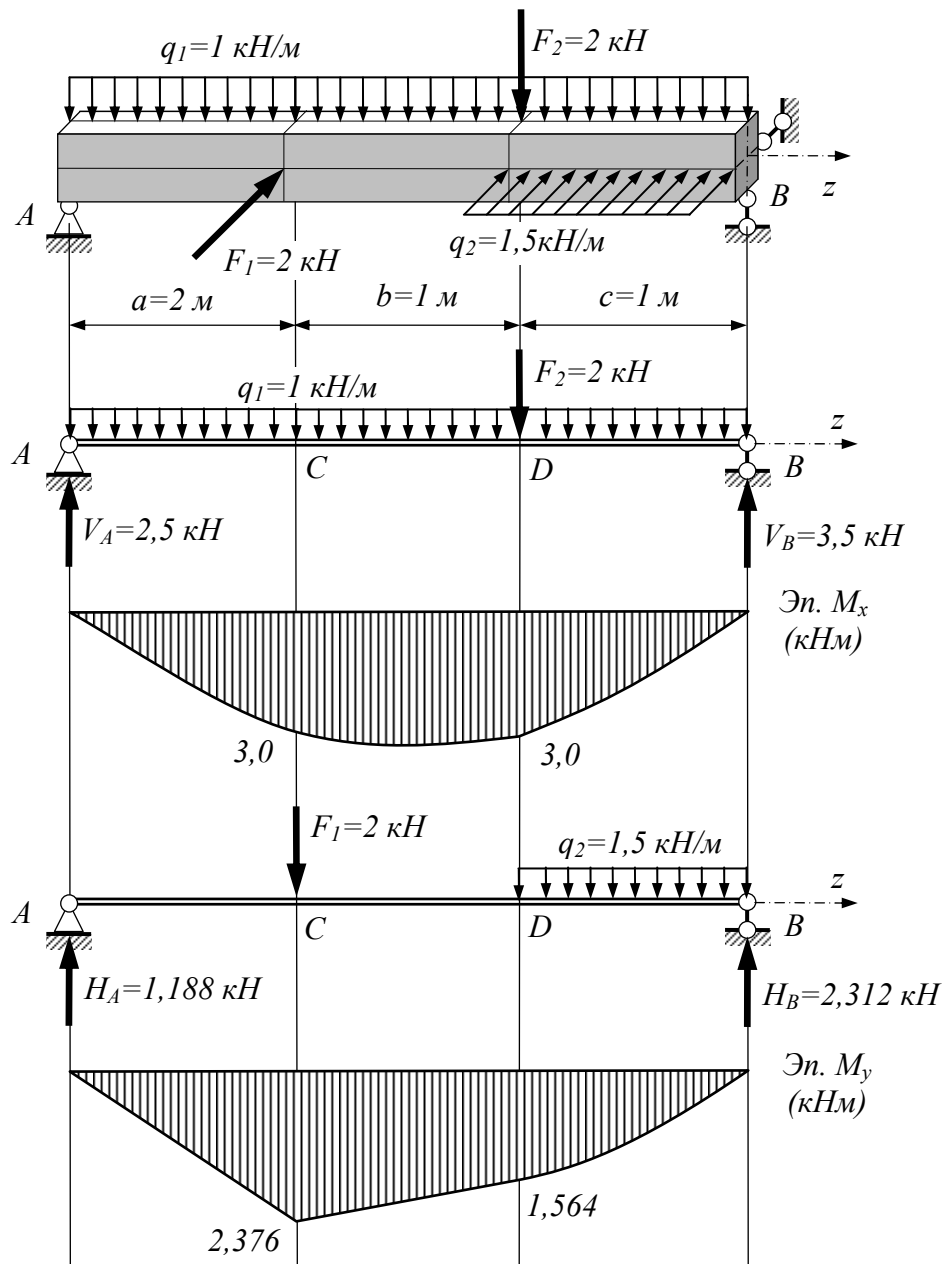


Рисунок 10

Запишем выражения для геометрических характеристик заданного прямоугольного сечения. Учитывая заданное соотношение сторон $h/b = 2/1$, получаем

$$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(2b)^3}{12} = 0,667b^4; \quad J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{2b(b)^3}{12} = 0,167b^4;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 0,667b^3; \quad W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{2b(b)^2}{6} = 0,333b^3.$$

Определяем положение нейтральной линии в опасном сечении по следующей формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{J_x}{J_y} \cdot \frac{M_y}{M_x} = \frac{0,667b^4}{0,167b^4} \cdot \frac{2,376}{3,0} = 3,163; \quad \varphi = 72,46^\circ.$$

Полученный угол откладываем от оси x (рис. 11).

Направление действия результирующего момента M_{tot} в рассматриваемом сечении бруса составляет угол α с вертикальной осью Oy , тогда,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{M_y}{M_x} = \frac{2,376}{3,0} = 0,792; \quad \alpha = 38,78^\circ.$$

Подбор размеров поперечного сечения выполняем по условию прочности по максимальным нормальным напряжениям при косом изгибе

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq R.$$

Подставляя в это условие ранее полученные выражения для моментов сопротивления поперечного сечения, получаем

$$\sigma_{\max} = \frac{3,0 \cdot 10^3}{0,667b^3} + \frac{2,376 \cdot 10^3}{0,333b^3} \leq R = 10 \cdot 10^6,$$

откуда

$$b = \sqrt[3]{\frac{11,633 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 0,105 \text{ м.}$$

Округляем полученные размеры поперечного сечения деревянной балки до целых сантиметров и окончательно принимаем $b = 11$ см. Следовательно, высота сечения равна $h = 22$ см.

Для построения эпюры нормальных напряжений, вычисляем их величины в угловых точках 1, 2, 3 и 4 (рис. 11). Следует иметь в виду, что в опасном сечении изгибающий момент M_x растягивает грань 3–4 и сжимает грань 1–2, а момент M_y растягивает грань 2–3 и сжимает грань 1–4.

$$\sigma_{(1)} = -\frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = -\frac{3,0 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,11^3} - \frac{2,376 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,11^3} = -3,384 - 5,361 = -8,745 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(2)} = -\frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = -\frac{3,0 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,11^3} + \frac{2,376 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,11^3} = -3,384 + 5,361 = 1,977 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} = \frac{3,0 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,11^3} + \frac{2,376 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,11^3} = 3,384 + 5,361 = 8,745 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{(4)} = \frac{M_x}{W_x} - \frac{M_y}{W_y} = \frac{3,0 \cdot 10^3}{0,667 \cdot 0,11^3} - \frac{2,376 \cdot 10^3}{0,333 \cdot 0,11^3} = 3,384 - 5,361 = -1,977 \text{ МПа};$$

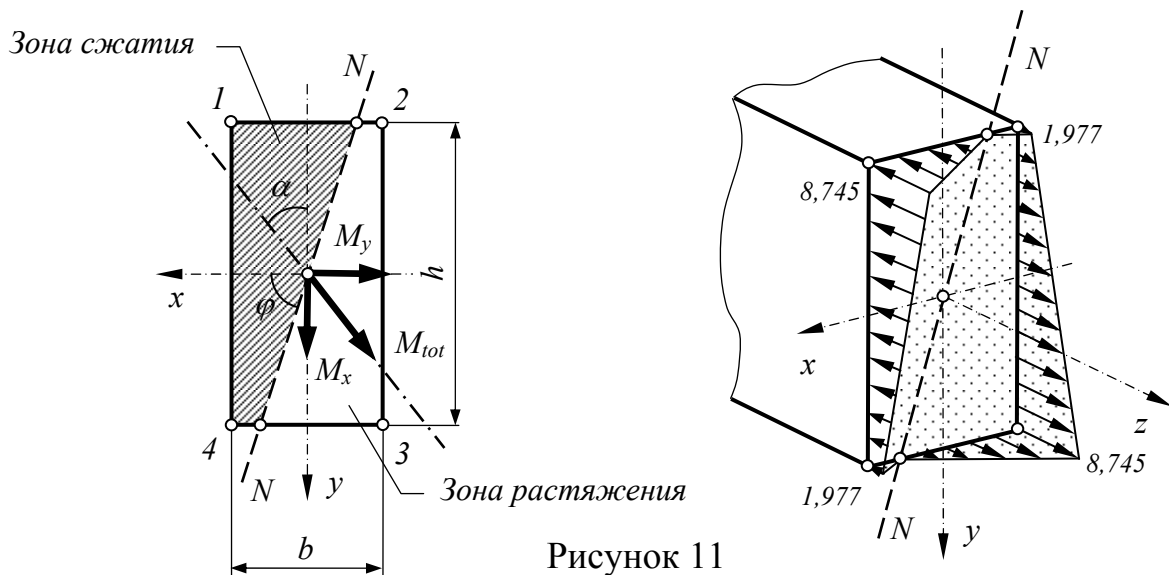


Рисунок 11

По найденным значениям строим эпюру распределения нормальных напряжений в опасном сечении в аксонометрии (рис. 11).

ЗАДАЧА № 9

РАСЧЕТ КОРОТКОГО СТЕРЖНЯ НА ВНЕЦЕНТРЕННОЕ СЖАТИЕ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

Чугунный короткий стержень, поперечное сечение которого изображено на рис. 12, сжимается продольной силой F , приложенной в точке A . Требуется вычислить:

- наибольшее растягивающее и наибольшее сжимающее напряжение в поперечном сечении, выразив эти напряжения через F , и размеры сечения;
- найти допускаемую нагрузку $[F]$ при заданных размерах сечения и расчетных сопротивлениях для чугуна на сжатие R_c и на растяжение R_t .

Исходные данные для решения задачи: $R_c = 140 \text{ МПа}$; $R_t = 24 \text{ МПа}$; $a = 4 \text{ см}$; $b = 4 \text{ см}$.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Определяем геометрические характеристики сечения. Выбираем вспомогательную систему координат ξ и η , направляя эти оси, как показано на рисунке. Сечение разбиваем на два элемента. Площади элементов сечения равны:

$$A_1 = 4b \cdot a = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ см}^2; \quad A_2 = 2b \cdot a = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32 \text{ см}^2.$$

Координаты центров тяжести элементов сечения:

$$\eta_1 = 0; \quad \eta_2 = 0 \text{ см}; \quad \xi_1 = 0; \quad \xi_2 = 4 \text{ см}.$$

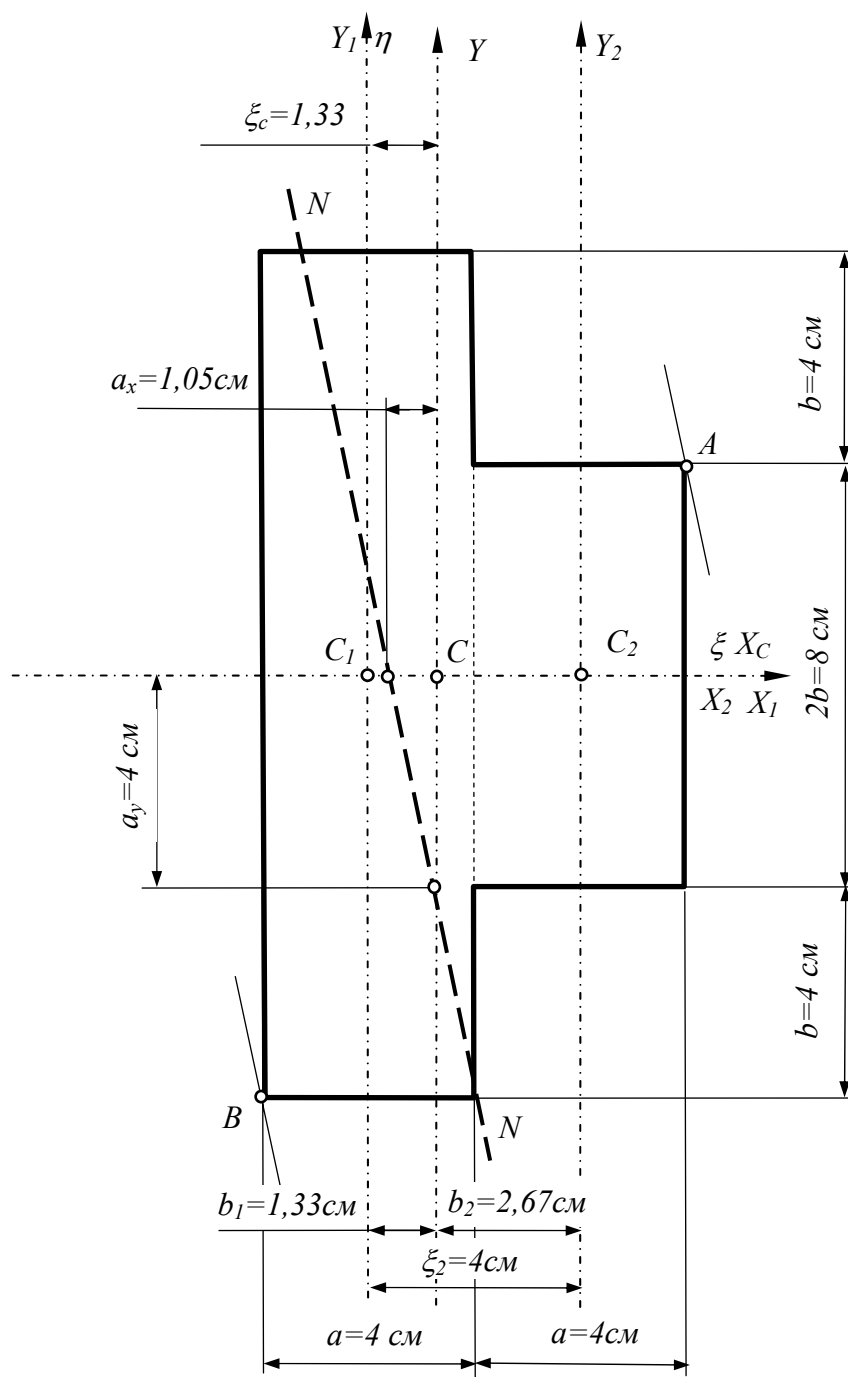


Рисунок 12

Находим координаты центра тяжести сечения в целом:

$$\eta_c = \frac{\sum A_i \eta_i}{\sum A_i} = \frac{64 \cdot 0 + 32 \cdot 0}{64 + 32} = 0 \text{ см};$$

$$\xi_c = \frac{\sum A_i \xi_i}{\sum A_i} = \frac{64 \cdot 0 + 32 \cdot 4}{64 + 32} = 1,33 \text{ см}.$$

Через полученную точку центра тяжести сечения проводим центральные оси X и Y . Координаты центров тяжести элементов в системе главных осей:

$$a_1 = \eta_1 - \eta_c = 0 \text{ см}; \quad a_2 = \eta_2 - \eta_c = 0 \text{ см};$$

$$b_1 = \xi_1 - \xi_c = 0 - 1,33 = -1,33 \text{ см}; \quad b_2 = \xi_2 - \xi_c = 4 - 1,33 = 2,67 \text{ см}.$$

Вычисляем осевые моменты инерции:

$$J_x = J_{x_1} + a_1^2 A_1 + J_{x_2} + a_2^2 A_2 = \frac{a \cdot (4b)^3}{12} + \frac{a \cdot (2b)^3}{12} = \frac{16^3 \cdot 4}{12} + \frac{8^3 \cdot 4}{12} = 1536 \text{ см}^4;$$

$$J_y = J_{y_1} + b_1^2 A_1 + J_{y_2} + b_2^2 A_2 = \frac{a^3 \cdot (4b)}{12} + b_1^2 A_1 + \frac{a^3 \cdot (2b)}{12} + b_2^2 A_2 =$$

$$= \frac{16 \cdot 4^3}{12} + (-1,33)^2 \cdot 64 + \frac{4^3 \cdot 8}{12} + 2,67^2 \cdot 32 = 469,33 \text{ см}^4.$$

Вычисляем квадраты главных радиусов инерции:

$$i_x^2 = \frac{J_x}{A} = \frac{1536}{96} = 16 \text{ см}^2; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{A} = \frac{469,33}{96} = 4,89 \text{ см}^2.$$

По чертежу определяем координаты приложения сжимающей силы P в системе главных центральных осей

$$X_p = 4,67 \text{ см}; \quad Y_p = 4 \text{ см}.$$

Для определения положения опасных точек поперечного сечения находим положение нейтральной линии. Вычисляем величину отрезков, отсекаемых этой линией от главных центральных осей инерции сечения:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_p} = -\frac{4,89}{4,67} = -1,05 \text{ см}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_p} = -\frac{16}{4} = -4 \text{ см}.$$

Опасные точки A и B (наиболее удаленные от нейтральной линии) имеют следующие координаты: $x_A = 4,67 \text{ см}$; $y_A = 4 \text{ см}$; $x_B = -3,33 \text{ см}$; $y_B = -8 \text{ см}$. В точке A заданного сечения возникают максимальные сжимающие напряжения, а в точке B – максимальные растягивающие напряжения. Находим напряжения в опасных точках:

$$\sigma_A = -\frac{F}{A} \left[1 + \frac{x_P x_A}{i_y^2} + \frac{y_P y_A}{i_x^2} \right] = -\frac{F}{96 \cdot 10^{-4}} \left[1 + \frac{4,67 \cdot 4,67}{4,89} + \frac{4 \cdot 4}{16} \right] =$$

$$= 672,91P \leq R_c = 140 \text{ МПа};$$

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left[1 + \frac{x_P x_B}{i_y^2} + \frac{y_P y_B}{i_x^2} \right] = -\frac{F}{96 \cdot 10^{-4}} \left[1 + \frac{4,67 \cdot (-3,33)}{4,89} + \frac{4 \cdot (-8)}{16} \right] =$$

$$= 435,44P \leq R_t = 24 \text{ МПа};$$

Из условия прочности в опасных точках сечения получаем:

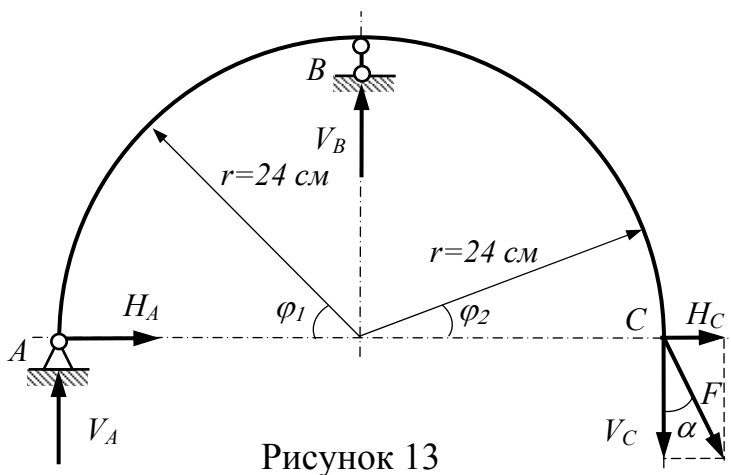
$$F \leq \frac{140 \cdot 10^6}{672,91} = 208,05 \text{ кН}; \quad F \leq \frac{24 \cdot 10^6}{435,44} = 55,12 \text{ кН}.$$

В качестве допускаемой нагрузки следует взять наименьшее из двух значений. Следовательно, допускаемая нагрузка равна: $[F] = 55,12 \text{ кН}$.

ЗАДАЧА № 10

РАСЧЕТ КРИВОГО БРУСА

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ



Построить эпюры M , N , Q и найти нормальные напряжения в опасном сечении кривого стержня.

Исходные данные для решения задачи: $F = 1800 \text{ Н}$; $r = 24 \text{ см}$; $d = 4,4 \text{ см}$; $\alpha = 40^\circ$; форма поперечного сечения бруса – 7-8; схема кривого бруса показана на рис. 13.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Разложим внешнюю силу F , приложенную к точке C , на вертикальную и горизонтальную составляющие.

$$H_C = F \cdot \sin \alpha = 1800 \cdot 0,6428 = 1157 \text{ Н};$$

$$V_C = F \cdot \cos \alpha = 1800 \cdot 0,7660 = 1379 \text{ Н}.$$

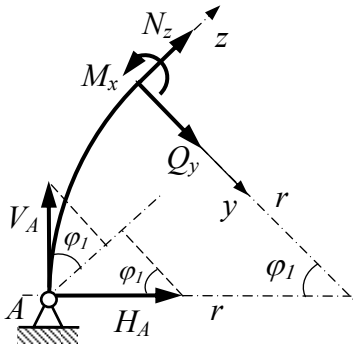
Используя уравнения равновесия статики, находим опорные реакции кривого бруса.

$$\sum x = 0; H_A + H_C = 0; H_A = -H_C = -1157 \text{ Н};$$

$$\sum m_A = 0; V_B \cdot r + V_C \cdot 2r = 0; V_B = 2V_C = 2 \cdot 1379 = 2758 \text{ Н};$$

$$\sum y = 0; V_A + V_B - V_C = 0; V_A = V_C - V_B = 1379 - 2758 = -1379 \text{ Н}.$$

Заданный кривой брус имеет два грузовых участка. Записываем аналитические выражения для внутренних силовых факторов на каждом грузовом участке. Первый грузовой участок $0 \leq \varphi_1 \leq 90^\circ$.



$$\sum z = 0; N_z + H_A \cdot \sin \varphi_1 + V_A \cdot \cos \varphi_1 = 0;$$

$$N_z = -H_A \cdot \sin \varphi_1 - V_A \cdot \cos \varphi_1;$$

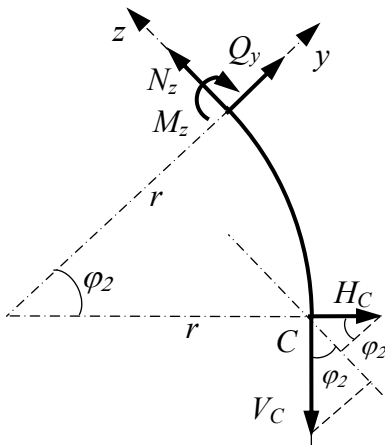
$$\sum y = 0; Q_y - V_A \cdot \sin \varphi_1 + H_A \cdot \cos \varphi_1 = 0;$$

$$Q_y = V_A \cdot \sin \varphi_1 - H_A \cdot \cos \varphi_1;$$

$$\sum m = 0; M_x - V_A r \cdot (1 - \cos \varphi_1) + H_A r \cdot \sin \varphi_1 = 0;$$

$$M_x = V_A r \cdot (1 - \cos \varphi_1) - H_A r \cdot \sin \varphi_1.$$

Второй грузовой участок $0 \leq \varphi_2 \leq 90^\circ$.



$$\sum z = 0; N_z - H_C \cdot \sin \varphi_2 - V_C \cdot \cos \varphi_2 = 0;$$

$$N_z = H_C \cdot \sin \varphi_2 + V_C \cdot \cos \varphi_2;$$

$$\sum y = 0; Q_y - V_C \cdot \sin \varphi_2 + H_C \cdot \cos \varphi_2 = 0;$$

$$Q_y = V_C \cdot \sin \varphi_2 - H_C \cdot \cos \varphi_2;$$

$$\sum m = 0; M_x + V_C r \cdot (1 - \cos \varphi_2) - H_C r \cdot \sin \varphi_2 = 0;$$

$$M_x = -V_C r \cdot (1 - \cos \varphi_2) + H_C r \cdot \sin \varphi_2$$

Задаемся шагом изменения угла $\Delta \varphi = 30^\circ$. Определяем тригонометрические функции соответствующих углов и строим эпюры внутренних силовых факторов в кривом брус (рис. 14).

Исходя из построенных эпюр, определяем положение опасного сечения. В этом сечении $M_x = 94,5 \text{ Нм}$, $N_z = 1773 \text{ Н}$.

Нормальные напряжения в поперечных сечениях кривого бруса определяются по формуле

$$\sigma_i = \pm \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_x y_i}{SR_i},$$

где y_i – координаты опасных точек поперечного сечения, отсчитываемые от нейтральной линии;

S – статический момент сечения относительно нейтральной линии;
 R_i – радиус кривизны крайних волокон кривого бруса;
 A – площадь поперечного сечения кривого бруса.

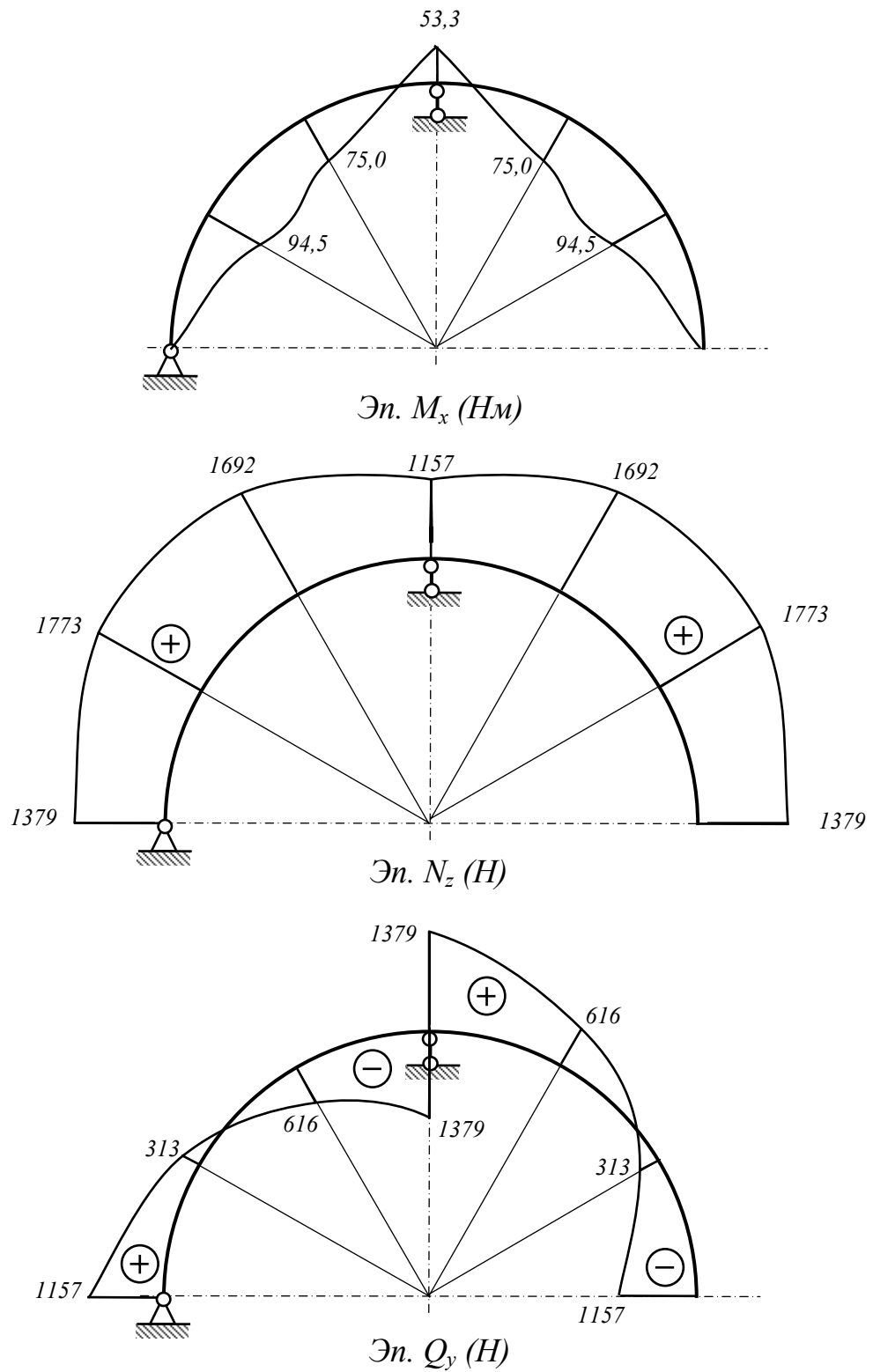


Рисунок 14

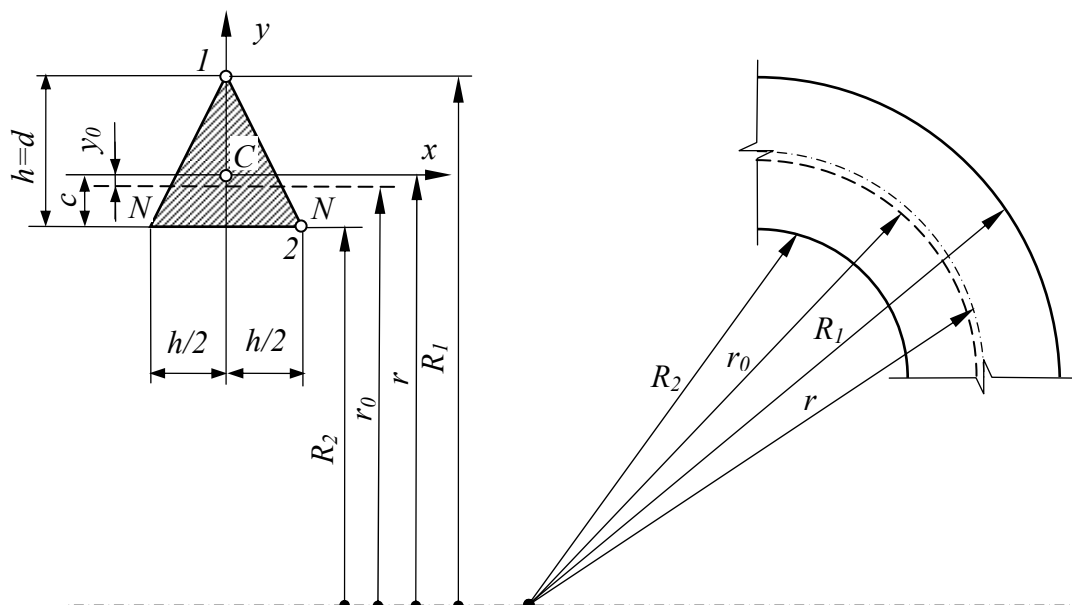


Рисунок 15

Вычисляем площадь поперечного сечения заданного кривого бруса

$$A = \frac{hb}{2} = \frac{d \cdot d}{2} = \frac{d^2}{2} = \frac{4,4^2}{2} = 9,68 \text{ см}^2.$$

Для того, чтобы вычислить величины S , R_i и y_i , определяем положение центра тяжести поперечного сечения и вычисляем радиус кривизны нейтрального слоя. Расстояние от основания треугольника до его центра тяжести равно

$$c = \frac{1}{3}h = \frac{1}{3}d = \frac{4,4}{3} = 1,47 \text{ см.}$$

Определяем радиусы кривизны крайних волокон кривого бруса (рис. 14)

$$R_2 = r - c = 24 - 1,47 = 22,53 \text{ см};$$

$$R_1 = R_2 + h = 22,53 + 4,4 = 26,93 \text{ см.}$$

Радиус кривизны нейтрального слоя треугольного поперечного сечения находим по следующей формуле

$$r_0 = \frac{h}{2 \left[\frac{R_1}{h} \cdot \ln \frac{R_1}{R_2} - 1 \right]} = \frac{4,4}{2 \cdot \left[\frac{26,93}{4,4} \cdot \ln \frac{26,93}{22,53} - 1 \right]} = 23,95283 \text{ см.}$$

Определяем расстояние между нейтральной линией и главной центральной осью поперечного сечения x

$$y_0 = r - r_0 = 24 - 23,95283 = 0,04717 \text{ см.}$$

Проверяем полученный результат, используя приближенную формулу

$$y_0 \approx \frac{J_x}{r \cdot A} = \frac{10,41}{24 \cdot 9,68} = 0,04481 \text{ см},$$

где $J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{d \cdot d^3}{36} = \frac{d^4}{36} = \frac{4,4^4}{36} = 10,41 \text{ см}^4$.

Статический момент сечения относительно нейтральной линии равен

$$S = A \cdot y_0 = 9,68 \cdot 0,04717 = 0,4566 \text{ см}^3.$$

Опасными точками поперечного сечения являются точки наиболее удаленные от нейтрального слоя. Находим координаты опасных точек относительно нейтральной оси

$$y_1 = R_1 - r_0 = 26,93 - 23,95283 = 2,97717 \text{ см};$$

$$y_2 = r_0 - R_2 = 23,95283 - 22,53 = 1,42283 \text{ см}.$$

Вычисляем нормальные напряжения в опасных точках сечения. В точке 1 напряжения от действия продольной силы N_z будут растягивающими, а от действия изгибающего момента M_x – сжимающими. Тогда

$$\sigma_1 = \frac{1773}{9,68 \cdot 10^{-4}} - \frac{94,5 \cdot 2,97717}{0,4566 \cdot 10^{-6} \cdot 26,93} = 1,83 - 22,88 = -21,05 \text{ МПа}.$$

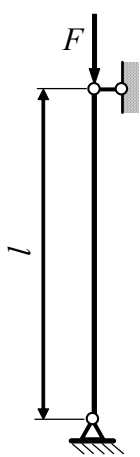
В точке 2 напряжения от действия продольной силы N_z будут растягивающими, а от действия изгибающего момента M_x – растягивающими. Тогда

$$\sigma_2 = \frac{1773}{9,68 \cdot 10^{-4}} + \frac{94,5 \cdot 1,42283}{0,4566 \cdot 10^{-6} \cdot 22,53} = 1,83 + 13,07 = 14,90 \text{ МПа}.$$

ЗАДАЧА № 11

РАСЧЕТ СЖАТОЙ СТОЙКИ НА УСТОЙЧИВОСТЬ

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ



Стальной стержень длиной l сжимается силой F .

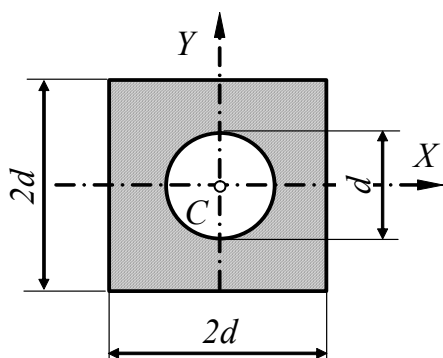
Требуется:

а) найти размеры поперечного сечения при допуске напряжении на простое сжатие $R = 160 \text{ МПа}$ (расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись коэффициентом продольного изгиба $\varphi = 0,5$);

б) найти значение критической силы и коэффициент запаса устойчивости.

Исходные данные для решения задачи: $F = 400 \text{ кН}$; $l = 2,4 \text{ м}$; схема поперечного сечения стойки 8; схема закрепления концов стойки 3–4.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ



Вычисляем геометрические характеристики заданного поперечного сечения сжатого стержня.

Площадь сечения равна:

$$A = 2d \cdot 2d - \frac{\pi \cdot d^2}{4} = 3,215d^2.$$

Находим минимальный осевой момент инерции заданного поперечного сечения:

$$J_{\min} = J_x = J_y = \frac{(2d)^4}{12} - \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 1,284d^4.$$

Определяем величину минимального радиуса инерции сечения:

$$i_{\min} = \sqrt{J_{\min} / A} = \sqrt{1,284d^4 / (3,215d^2)} = 0,632d.$$

Находим размеры поперечного сечения стойки из условия устойчивости.

Первая попытка. Принимаем $\varphi_1 = 0,5$. Тогда из условия устойчивости найдем требуемую площадь поперечного сечения стержня:

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq \varphi R$$

$$A_{mp} = \frac{F}{\varphi R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 50 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 50 \text{ см}^2.$$

Учитывая ранее полученные выражения для величин A и i_{\min} , имеем:

$$d = \sqrt{A / 3,215} = \sqrt{50 / 3,215} = 3,94 \text{ см}, \quad i_{\min} = 0,632 \cdot 3,94 = 2,49 \text{ см}.$$

Вычисляем гибкость стержня по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,0 \cdot 240}{2,49} = 96,29$$

где $\mu = 1,0$ – коэффициент приведенной длины, выбираемый в зависимости от условий закрепления концов стержня.

Табличное значение коэффициента продольного изгиба для стержней из стали марки Ст 3 при гибкости $\lambda = 96,29$ находится интерполяцией

$$\varphi'_1 = 0,665 - \frac{0,665 - 0,599}{10} \cdot 6,29 = 0,623.$$

$$\text{Вторая попытка: } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi'_1}{2} = \frac{0,5 + 0,623}{2} = 0,562.$$

$$A_{mp} = \frac{F}{\varphi R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,562 \cdot 160 \cdot 10^6} = 44,48 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 44,48 \text{ см}^2.$$

$$d = \sqrt{A/3,215} = \sqrt{44,48/3,215} = 3,72 \text{ см}, \quad i_{\min} = 0,632 \cdot 3,72 = 2,35 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,0 \cdot 240}{2,35} = 102,09.$$

$$\varphi'_2 = 0,599 - \frac{0,599 - 0,537}{10} \cdot 2,09 = 0,586.$$

Третья попытка: $\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi'_2}{2} = \frac{0,562 + 0,586}{2} = 0,574.$

$$A_{mp} = \frac{F}{\varphi R} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,574 \cdot 160 \cdot 10^6} = 43,55 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 43,55 \text{ см}^2.$$

$$d = \sqrt{A/3,215} = \sqrt{43,55/3,215} = 3,68 \text{ см}, \quad i_{\min} = 0,632 \cdot 3,68 = 2,33 \text{ см}.$$

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{1,0 \cdot 240}{2,33} = 103,18.$$

$$\varphi'_3 = 0,599 - \frac{0,599 - 0,537}{10} \cdot 3,18 = 0,579.$$

Определяем величину расчетных напряжений в сечении стержня:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,579 \cdot 43,55 \cdot 10^{-4}} = 158,64 \text{ МПа} < R = 160 \text{ МПа}.$$

Недогрузка составляет: $\frac{160 - 158,64}{160} \cdot 100\% = 0,85\% < 5\%$, что допустимо.

Находим значение критической силы. Расчетная гибкость стержня $\lambda = 103,18$, что больше предельного значения $\lambda = 100$. Следовательно, при определении критической силы необходимо пользоваться формулой Эйлера:

$$F_{cr} = \sigma_{cr} A = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} A = \frac{3,14^2 \cdot 2 \cdot 10^{11}}{103,18^2} \cdot 43,55 \cdot 10^{-4} = 806,65 \cdot 10^3 \text{ Н} = 806,65 \text{ кН}.$$

Коэффициент запаса устойчивости равен:

$$k_y = \frac{F_{cr}}{F} = \frac{806,65}{400} = 2,017.$$

ЗАДАЧА № 12

РАСЧЕТ БАЛКИ НА ПОПЕРЕЧНЫЙ УЛАР

1. ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ И УСЛОВИЕ ЗАДАЧИ

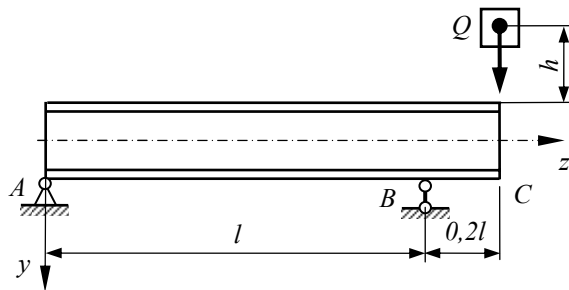


Рисунок 15

На двутавровую балку, свободно лежащую на двух жестких опорах, с высоты h падает груз Q (рис. 15).

Требуется:

- 1) найти наибольшее нормальное напряжение в балке;
- 2) решить аналогичную задачу при условии, что правая опора заменена пружиной, податливость которой (т.е. осадка от груза 1 кН) равна α ;
- 3) сравнить полученные результаты.

Исходные данные для решения задачи: $Q = 400$ Н; $l = 2,8$ м; $h = 4$ см; $\alpha = 28 \cdot 10^{-3}$ м/кН; двутавр № 24а, схема балки 8.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для ответа на первый вопрос задачи необходимо найти величину опорных реакций балки от статического воздействия груза Q (рис. 16). Используя уравнения равновесия статики, получаем:

$$\sum m_A = 0; V_B \cdot l - Q \cdot (l + 0,2l) = 0; V_B = Q \cdot (l + 0,2l) / l = 1,2Q;$$

$$\sum m_B = 0; V_A \cdot l + Q \cdot 0,2l = 0; V_A = -Q \cdot 0,2l / l = -0,2Q.$$

Проверка:

$$\sum y = 0; V_A + V_B - Q = 0; -0,2Q + 1,2Q - Q = 0.$$

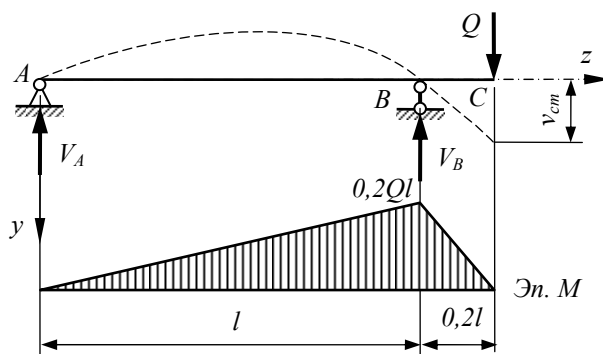


Рисунок 16

Строим эпюру изгибающих моментов в заданной балке от статического действия груза Q . Записываем уравнение метода начальных параметров для определения прогибов оси балки

$$v_i = v_0 + \theta_0 z_i - \frac{V_A z_i^3}{6EJ_x} \Big|_0^{1,2l} - \frac{V_B (z_i - l)^3}{6EJ_x} \Big|_l^{1,2l}.$$

Начальные параметры задачи v_0 и θ_0 определяем исходя из следующих граничных условий:

$z_i = 0; v(0) = 0$, отсюда $v_0 = 0$;

$z_i = l; v(l) = 0$, отсюда $0 = 0 + \theta_0 l - \frac{V_A l^3}{6EJ_x}$, тогда $\theta_0 = \frac{V_A l^2}{6EJ_x} = \frac{-0,2Ql^2}{6EJ_x}$.

Вычисляем вертикальное перемещение балки в точке C , где приложена сила Q , при $z_i = 1,2l$

$$v_{cm} = 0 + \frac{-0,2Ql^2}{6EJ_x} \cdot 1,2l - \frac{-0,2Q \cdot (1,2l)^3}{6EJ_x} - \frac{1,2Q \cdot (1,2l - l)^3}{6EJ_x} = 0,016 \frac{Ql^3}{EJ_x};$$

$$v_{cm} = 0,016 \frac{Ql^3}{EJ_x} = 0,016 \cdot \frac{400 \cdot 2,8^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3800 \cdot 10^{-8}} = 1,849 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Вычисляем динамический коэффициент по следующей формуле

$$k_\delta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{1,849 \cdot 10^{-5}}} = 66,79.$$

Максимальный изгибающий момент, возникающий в балке от статического действия груза Q , равен

$$M_{\max} = 0,2Ql = 0,2 \cdot 400 \cdot 2,8 = 224 \text{ Нм.}$$

Вычисляем величину максимальных нормальных напряжений от статического действия груза Q

$$\sigma_{\max}^{cm} = \frac{M_{\max}}{W_x} = \frac{224}{317 \cdot 10^{-6}} = 0,707 \cdot 10^6 \text{ Па} = 0,707 \text{ МПа.}$$

Здесь $W_x = 317 \text{ см}^3$ – момент сопротивления двутавра № 24а, определяемый по сортаменту прокатной стали.

Максимальные нормальные напряжения от ударного действия падающего груза Q равны

$$\sigma_{\max}^{дин} = \sigma_{\max}^{cm} \cdot k_\delta = 0,707 \cdot 66,79 = 47,22 \text{ МПа.}$$

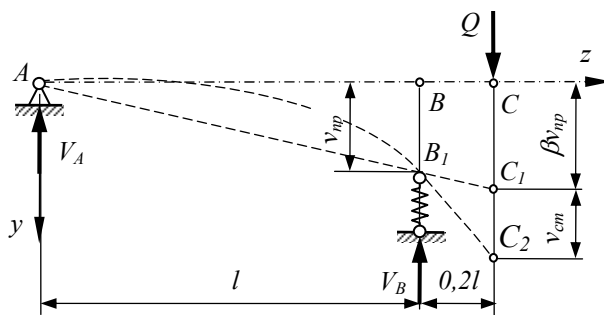


Рисунок 17

Для ответа на второй вопрос задачи рассмотрим деформированное состояние балки при замене ее правой опоры пружиной, имеющей заданную податливость α (рис. 17). При указанной замене, прогиб балки от статического действия груза Q будет равен:

$$v'_{cm} = v_{cm} + \beta v_{нр}.$$

Как следует из чертежа треугольник ABB_1 подобен треугольнику ACC_1 . Исходя из этого подобия, имеем

$$\frac{v_{np}}{l} = \frac{\beta v_{np}}{1,2l}, \text{ тогда } \beta = 1,2.$$

Осадка пружины возникает от действия опорной реакции V_B при статическом приложении к балке груза Q и равна

$$v_{np} = \alpha V_B = 28 \cdot 10^{-6} \cdot 1,2 \cdot 400 = 1344 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Прогиб балки в точке C при статическом действии силы Q

$$v'_{cm} = 1,849 \cdot 10^{-5} + 1344 \cdot 10^{-5} = 1345,849 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Вычисляем величину динамического коэффициента при подпружиненной правой опоре

$$k'_o = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{v'_{cm}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{1345,849 \cdot 10^{-5}}} = 3,64.$$

Максимальные нормальные напряжения от ударного действия падающего груза Q при замене правой опоры на пружину равны

$$\sigma'_{\max}{}^{дин} = \sigma_{\max}{}^{ст} \cdot k'_o = 0,707 \cdot 3,64 = 2,57 \text{ МПа.}$$

Таким образом, при замене жесткой опоры в точке B пружиной максимальные нормальные напряжения в поперечном сечении балки уменьшаются в

$$\frac{\sigma_{\max}{}^{ст}}{\sigma'_{\max}{}^{дин}} = \frac{47,22}{2,57} = 18,374 \text{ раза.}$$