Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Строительная механика»

В.А. Бобрин С.А. Бобушев

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Рекомендовано
Дальневосточным региональным
учебно-методическим центром (ДВ РУМЦ)
в качестве учебного пособия
для студентов направлений
190200 «Транспортные машины
и транспортно-технологические комплексы»,
190300 «Подвижной состав железных дорог»,
270100 «Строительство»,
270200 «Транспортное строительство»
вузов региона

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2006

УДК 539.3 (075.8)
ББК Ж121я73
Б 724

Рецензенты:

Кафедра «Механика деформируемого твердого тела»
Тихоокеанского государственного университета
(заведующий кафедрой кандидат технических наук, доцент
А.А. Вайсфельд)

Доктор технических наук,
профессор кафедры «Механика деформируемого твердого тела»
Дальневосточного государственного технического университета
К.П. Горбачев

Бобрин, В. А.
Б 724 Руководство к решению задач по сопротивлению материалов : учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 2 / В. А. Бобрин, С. А. Бобушев. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2006. – 82 с. : ил.

Учебное пособие соответствует дисциплине «Сопротивление материалов» по ГОС ВПО направлений 190200 «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», 190300 «Подвижной состав железных дорог», 270100 «Строительство», 270200 «Транспортное строительство».

Учебное пособие состоит из 2 частей. Часть 2 содержит теоретический материал и примеры решения типовых задач по разделам курса «Сопротивление материалов»: «Расчет статически неопределимых систем», «Сложное сопротивление», «Расчет сжатых стержней на устойчивость», «Динамическое действие нагрузок», «Расчет на прочность при напряжениях, циклически изменяющихся во времени (расчет на усталость)».

Предназначено для студентов 2-го и 3-го курсов всех форм обучения.

УДК 539.3 (075.8)
ББК Ж121я73

© ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения» (ДВГУПС), 2006

ВВЕДЕНИЕ

Пособие ориентировано на студентов, изучающих сопротивление материалов. Весьма ограниченное время, отводимое на аудиторные занятия заочников в период установочных сессий, не позволяет в достаточной мере охватить вопросы, отражающие содержание второй части курса сопротивления материалов, особенно в решении задач.

Цель пособия – побудить обучающихся как к самостоятельному изучению теоретической части, так и к самостоятельному выполнению обязательных контрольных заданий, а также сформировать навыки решения задач. Это важно для бóльшей части студентов из небольших населенных пунктов, которые в период между сессиями практически лишены консультаций с преподавателями. В пособии принята форма изложения в виде подробного решения конкретных типовых задач, соответствующих требованиям заданий на контрольные работы, и кратких к ним комментариев с объяснением основных понятий, используемых в разделе курса.

Помимо первичного ознакомления с методами расчета простейших статически неопределимых стержневых систем, включая метод сил, рассмотрено сложное сопротивление жестких призматических стержней при их статическом нагружении. Приведены расчеты центрально сжатого одноветвевого и составного стержня на устойчивость I рода, а также примеры динамического воздействия внешних сил (удар и вынужденные колебания упругих безмассовых балок с одной степенью свободы) и практические приемы проверки элементов сооружений и машин на усталостную прочность на примере витой цилиндрической клапанной пружины малого шага с построением диаграммы предельных амплитуд по Серенсену-Киносошвили.

Опыт показывает, что подобные учебные пособия оказывают существенную помощь студенту в выполнении контрольных работ.

Пособие содержит справочные приложения (прил. 1–4), программу подготовки к экзаменам (прил. 5), условия задач для самоподготовки (прил. 6). Приводится краткое изложение метода Мора определения упругих перемещений в стержневых системах.

Более детально ознакомиться с методическим материалом можно в [1–17].

1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ

1.1. Задача 10. Определение несущей способности статически неопределимой системы при осевой деформации по методам допускаемых напряжений и разрушающих нагрузок

Основные понятия

Статически неопределимыми называются конструкции, в элементах которых усилия не могут быть определены только из уравнений статики. Кроме уравнений статики, при решении статически неопределимых задач необходимо использовать также уравнения, учитывающие деформации элементов конструкции.

Система называется *n* раз статически неопределимой, если число неизвестных на *n* превышает число независимых уравнений статики. *Степень статической неопределимости n* (число *лишних неизвестных Л*) определяется по формуле

$$n = Л = Н – У,$$

где *Н* – общее число неизвестных, требующих определения; *У* – число независимых уравнений статики.

Все статически неопределимые конструкции имеют так называемые *лишние связи* в виде опорных устройств или других конструктивных элементов, которые не являются необходимыми для обеспечения равновесия системы и ее геометрической неизменяемости, а обусловливаются требованиями к прочности и жесткости конструкции.

Решение статически неопределимых задач проводят в четыре этапа.

1. *Статическая сторона задачи.*

Составляют уравнения равновесия отсеченных элементов конструкции, содержащие неизвестные усилия.

2. *Геометрическая сторона задачи.*

Устанавливают связь между деформациями отдельных элементов конструкции, исходя из условий совместности деформаций. Полученные уравнения называются *уравнениями совместности деформаций*.

3. *Физическая сторона задачи*.

В уравнениях совместности выражают деформации элементов конструкции на основании закона Гука $\Delta\ell = \frac{N\ell}{EA}$ через действующие в них неизвестные усилия. В формуле закона Гука: $\Delta\ell$ – абсолютное удлинение стержня; *N* – продольная сила в стержне; ℓ – длина стержня; *EA* – жесткость стержня при растяжении-сжатии; *E* – модуль упругости при растяжении (модуль Юнга); *A* – площадь поперечного сечения.

4. *Синтез*.

Решают совместно полученные уравнения относительно искомых неизвестных усилий.

Отметим особенности работы и расчета статически неопределимых систем.

1. Недостающие для определения усилий уравнения могут быть получены *только* при помощи изучения совместности деформаций данной системы.

2. Распределение усилий между элементами статически неопределимой конструкции зависит от соотношения между площадями, модулями упругости и длинами этих элементов.

3. Чем более жёсток данный элемент, т. е. чем меньше его длина и больше площадь и модуль упругости, тем сравнительно бóльшую долю усилия он принимает на себя.

В элементах статически неопределимых систем усилия могут возникать и при отсутствии внешней нагрузки – в результате, например, изменения температуры, смещения опорных закреплений, неточности изготовления отдельных элементов конструкции. Напряжения, возникающие в результате сборки (монтажа) конструкции с неточно изготовленными элементами, называются *начальными* или *монтажными*.

При определении несущей способности конструкции используется *метод допускаемых напряжений* (*МДН*) или *метод разрушающих нагрузок* (*МРН*). При расчете по МДН найденные напряжения сопоставляются с предельной величиной для данного материала, при расчете по МРН находится предельная нагрузка, которую может выдержать конструкция, не разрушаясь или не изменяя существенно форму.

Условие примера

Для заданной системы определить несущую способность (F = ?), если балка АВС считается недеформируемой (EJ d ×), материал стержней – малоуглеродистая сталь Ст3, для которой модуль Юнга $E = 2\cdot10^5$ *МПа* = $2\cdot10^4$ *кН/см*^{2}, предел текучести $\sigma_T = 240$ *МПа* = 24 *кН/см*^{2}, коэффициент запаса прочности при статическом нагружении системы $K_0 = 1{,}5$. Остальные данные на рис. 1.1, *а*.

Расчет

1. Степень статической неопределимости.

Жесткая балка прикреплена к основанию шарнирно-неподвижной опорой А и двумя шарнирно прикрепленными стержнями ① и ②. В указанных связях возникают реакции H_A, R_A, R_1, R_2 – всего четыре. Уравнений статики для рассматриваемой плоской системы сил имеем три, например, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma m_A = 0$. Итак, если неизвестных реакций $H = 4$, а уравнений статики $У = 3$, то

$$Л = Н – У = 4 – 3 = 1$$

и система один раз статически неопределима.

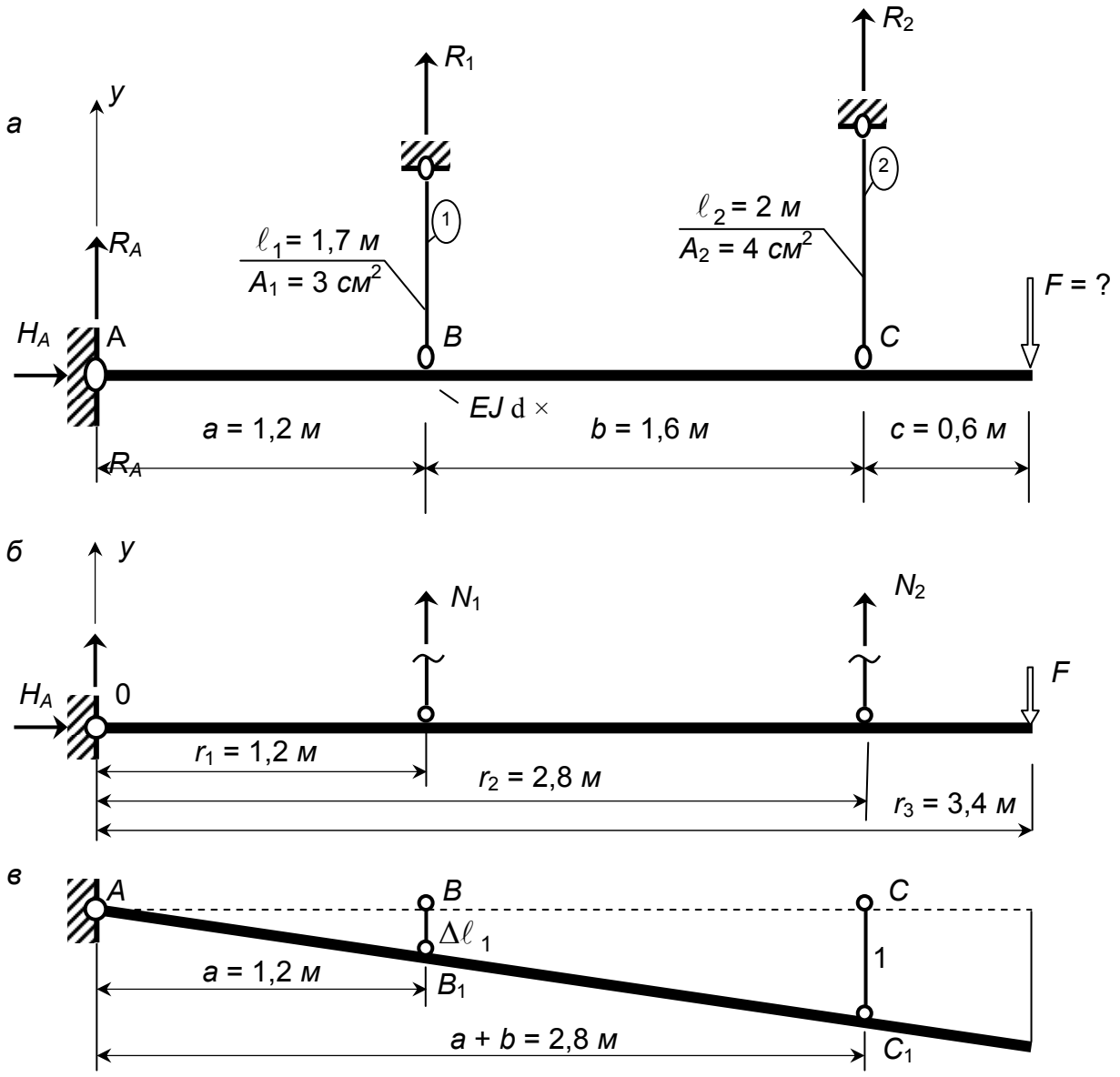


Рис. 1.1. Статически неопределимая система: *а* – заданная система; *б* – объект равновесия; *в* – совместные деформации стержней ① и ②

2. Определение [*F*] по методу допускаемых напряжений.

I. Статическая сторона задачи (ССЗ). Выделив объект равновесия (рис. 1.1, *б*), имеем

$$\Sigma m_A = N_1 r_1 + N_2 r_2 - F r_3 = 0. \qquad (1.1)$$

Так как расчет опоры А здесь не предполагается, то ее реакции R_A и H_A не вычисляем.

II. Геометрическая сторона задачи (ГСЗ). Из условия совместности деформаций системы (рис. 1.1, *в*), используя подобие треугольников ABB_1 и ACC_1, получим геометрическое уравнение

$$\frac{\Delta\ell_2}{a+b} = \frac{\Delta\ell_1}{a}, \qquad (1.2)$$

где $\Delta\ell_1$, $\Delta\ell_2$ – абсолютные удлинения стержней ① и ②.

III. Физическая сторона задачи (ФСЗ). Используя закон Гука

$$\Delta\ell_i = \frac{N_i \ell_i}{EA_i},$$

можем записать:

$$\Delta\ell_1 = \frac{N_1\ell_1}{EA_1}, \qquad \Delta\ell_2 = \frac{N_2\ell_2}{EA_2}. \qquad (1.3)$$

Теперь, подставляя выражения (1.3) в геометрическое уравнение совместности деформаций (1.2), получим

$$\frac{N_2\ell_2}{(a+b)EA_2} = \frac{N_1\ell_1}{aEA_1},$$

откуда $N_2 = \frac{a+b}{a}\ \frac{\ell_1}{\ell_2}\ \frac{EA_2}{EA_1}\ N_1 = \frac{2{,}8\ м}{1{,}2\ м}\ \frac{1{,}7\ м}{2\ м}\ \frac{4\ см^2}{3\ см^2}\ N_1$ и, таким образом, $N_2 = 2{,}644\ N_1$. Последнее внесем в уравнение статики (1.1), тогда $1{,}2\ N_1 + 2{,}8\quad 2{,}644\ N_1 = 3{,}4\ F$, откуда $N_1 = \frac{3{,}4}{8{,}603} F = 0{,}395\ F$ и, следовательно, $N_2 = 2{,}644\quad 0{,}395\ F = 1{,}044\ F$. Получены значения усилий N_1 и N_2 в виде функции от F.

Для установления опасного состояния конструкции подсчитаем нормальные напряжения в стержнях:

$$\sigma_{(1)} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{0{,}395}{3} F = 0{,}132\ F, \quad \sigma_{(2)} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{1{,}044}{4} F = 0{,}261\ F.$$

Как видно, $\sigma_{(2)} > \sigma_{(1)}$, и при возрастании нагрузки стержень ② первым достигнет стадии текучести. С точки зрения метода допускаемых напряжений это состояние конструкции является опасным и, следовательно, должно выполняться условие прочности

$$\max \sigma \ \mathrm{m}\ [\sigma],$$

где $[\sigma] = \frac{\sigma_T}{K_0} = \frac{24}{1{,}5} = 16\ кН/см^2$.

Теперь из соотношения $\max\sigma=\sigma_{(2)}$ определим допускаемую нагрузку

$$0{,}261[F]\ \mathrm{m}\ [\sigma],\ \text{откуда}\ [F]\ \mathrm{m}\ \frac{16}{0{,}261}=61{,}30\ \textit{кН}.$$

При этой нагрузке в стержне ① рабочие напряжения составят величину $\sigma_{(1)}=\dfrac{N_1}{A_1}=\dfrac{0{,}395[F]}{A_1}=\dfrac{0{,}395\cdot 61{,}3}{3}=8{,}07\ \textit{кН/см}^2$, что меньше допускаемых напряжений $[\sigma]$ на $\left(1-\dfrac{8{,}07}{16}\right)\cdot 100\,\%=49{,}6\,\%$.

Как видно, стержень ① существенно недогружен, и вся конструкция еще далека от разрушения, ибо при вступлении стержня ② в стадию текучести $\sigma_{(2)}=\sigma_{\mathrm{T}}$ стержень ① еще работает упруго $\sigma_{(1)}<\sigma_{\mathrm{T}}$ и система еще не потеряла своей несущей способности (рис. 1.2).

Рис. 1.2. Предельное (опасное) состояние конструкции, принимаемое в методе допускаемых напряжений

3. Определение допускаемой нагрузки по методу разрушающих (предельных) нагрузок.

Во многих случаях для более глубокой оценки несущей способности сооружения важно установить ту предельную нагрузку, которая способна поставить его на грань либо разрушения, либо развития недопустимых деформаций. Эта идея расчета по разрушающим нагрузкам была высказана русским инженером А.Ф. Лолейтом (1868–1933) и позднее развита немецким ученым Людвигом Прандтлем (1875–1953), чьим именем названа условная диаграмма напряжений (диаграмма Прандтля), приведенная на рис. 1.3 и отражающая понятие о модели упругопластического материала.

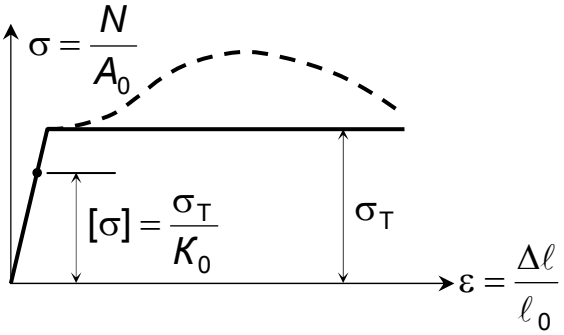


Рис. 1.3. Диаграмма Прандтля

Продолжая увеличивать нагрузку F и полагая, что стержень ②, достигнув предела текучести σ_T, в дальнейшем сохраняет свое усилие $N_2 = \sigma_T A_2$ неизменным, а в стержне ①, который теперь вынужденно обязан воспринимать увеличивающуюся нагрузку, напряжения $\sigma_{(1)}$ стремятся к σ_T.

В момент достижения усилием N_1 значения $N_1 = \sigma_T A_1$ вся конструкция достигает предельного равновесия, после чего при неизменных предельных значениях N_1 и N_2 (рис. 1.4) дальнейшее возрастание нагрузки F невозможно – система исчерпала несущую способность.

Теперь составим условие предельного равновесия, а именно, $\Sigma m_A = 0$ (рис. 1.4), что дает $N_1 r_1 + N_2 r_2 - F_{пред} r_3 = 0$, откуда

$$F_{пред} = \frac{N_1 r_1 + N_2 r_2}{r_3} = \frac{\sigma_т (A_1 r_1 + A_2 r_2)}{r_3} = \frac{24(3 \quad 1{,}2 + 4 \quad 2{,}8)}{3{,}4} = 104{,}47\,кН.$$

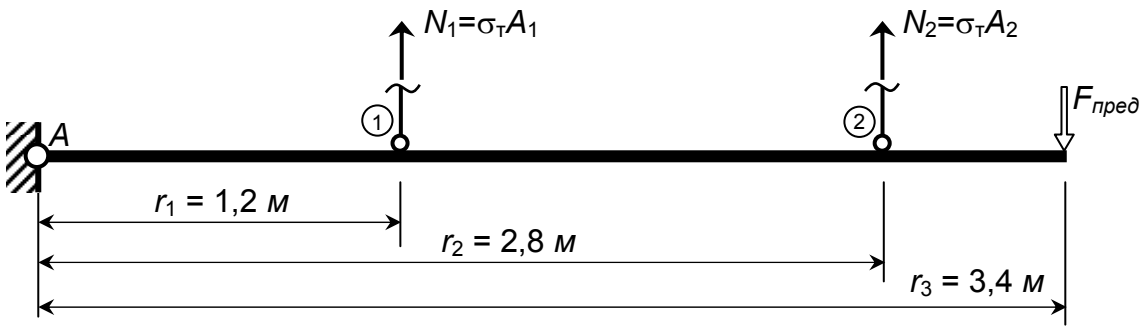


Рис. 1.4. Предельное равновесие системы в момент достижения напряжением $\sigma_{(1)}$ предела текучести $\sigma_т$

Используя предыдущий коэффициент запаса $K_0 = 1{,}5$, подсчитаем допускаемую нагрузку

$$F_{доп} = \frac{F_{пред}}{K_0} = \frac{104{,}47}{1{,}5} = 69{,}6\ кН,$$

что на $\left(\frac{69{,}6}{63{,}1} - 1\right) \cdot 100\,\% \approx 13{,}6\,\%$ больше чем $[F]$, определенная по методу допускаемых напряжений.

Вывод: метод разрушающих нагрузок позволил вскрыть дополнительный резерв несущей способности сооружения. Заметим, что для сложных систем применение этого метода довольно сложно.

1.2. Задача 11. Расчет статически неопределимой балки

Основные понятия

Метод сил является одним из двух основных методов расчета статически неопределимых систем. При его использовании основными неизвестными в уравнениях совместности деформаций являются силы (внешние и внутренние), а известными – перемещения в направлении этих сил, что и обусловило само название данного метода расчета.

Решение статически неопределимых систем по методу сил производится в строго определенном порядке:

– выявляются лишние связи и устанавливается степень статической неопределимости системы;

– выбирается для расчета основная система;

– основная система загружается заданной внешней нагрузкой и реакциями или усилиями отброшенных связей;

– составляются уравнения, выражающие условия эквивалентности основной системы, загруженной заданной внешней нагрузкой и неизвестными усилиями, приложенными вместо отброшенных связей, и заданной системой. Эти уравнения составляются по единому правилу и называются *каноническими*;

– определяются коэффициенты при неизвестных усилиях в канонических уравнениях;

– решается система канонических уравнений и после определения неизвестных усилий строятся эпюры внутренних сил;

– выполняются статические и деформационные проверки правильности построения расчетных эпюр внутренних усилий.

Основной при расчете статически неопределимых систем по методу сил называется статически определимая и геометрически неизменяемая система, полученная из заданной путем отбрасывания лишних связей. В качестве лишних при выборе основной системы могут быть приняты как внутренние, так и внешние связи. Внешние связи представляют собой связи опорные, а внутренние – это связи, препятствующие взаимным перемещениям двух смежных сечений.

Для любой статически неопределимой системы всегда имеется множество вариантов основной системы. Выбор рациональной основной системы снижает трудоемкость расчета.

Условием эквивалентности заданной и основной систем является равенство нулю перемещений по направлению удаленных связей. Запишем условие эквивалентности загруженной основной и заданной статически неопределимой системы с n лишними связями в развернутой форме, используя принцип независимости действия сил. В соответствии с данным принципом перемещение по направлению i-й отброшенной связи

$$\Delta_i = \Delta_{i1} + \Delta_{i2} + \Delta_{i3} + \ldots + \Delta_{ik} + \ldots + \Delta_{in} + \Delta_{ip} = 0 ,$$

где Δ_{ik} – перемещение по направлению i-й отброшенной связи, вызванное действие k-й неизвестной силы; Δ_{ip} – перемещение по направлению i-й отброшенной связи от действия заданной нагрузки.

Используя основное свойство линейно деформируемых систем, любое перемещение, вызванное действием какой-либо силы, можно выразить в виде произведения этой силы на перемещение того же вида и в том же направлении от действия соответствующей единичной силы

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} X_k ,$$

где δ_{ik} – перемещение по направлению i-й связи от единичной силы, приложенной вместо силы X_k; X_k – искомое усилие.

Для статически неопределимой системы, имеющей n лишних связей, система канонических уравнений имеет вид

$$\left.\begin{array}{l}
\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1i}X_i + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1p} = 0, \\
\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2i}X_i + \ldots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2p} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \ldots + \delta_{ii}X_i + \ldots + \delta_{in}X_n + \Delta_{ip} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{ni}X_i + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{np} = 0.
\end{array}\right\}$$

Канонические уравнения выражают условия равенства нулю перемещений в основной системе, находящейся под действием заданной внешней нагрузки и искомых неизвестных сил, в местах приложения и по направлению этих неизвестных.

Коэффициенты, имеющие одинаковые индексы δ_{ii}, называются *главными*, они всегда больше нуля. Коэффициенты с различными индексами δ_{ik} называются *побочными*. Они могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Побочные коэффициенты с обратными индексами, согласно теореме о взаимности перемещений, равны между собой $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Величины Δ_{ip} называют *грузовыми членами* канонических уравнений.

На основе принципа независимости действия сил усилия в произвольных сечениях элементов статически неопределимой системы, имеющей n лишних связей, определяются по уравнению:

$$S_{расч} = S_p^0 + \sum_{i=0}^{n} \overline{S}_i X_i ,$$

где S_p^0 – усилия в основной системе от заданной нагрузки; $\overline{S}_i$ – усилия от единичных нагрузок, приложенных в направлениях действия лишних неизвестных.

Правильно построенные эпюры должны удовлетворять условию равновесия и условию деформирования заданной системы. С этой целью выполняют *статическую* и *деформационную* проверки.

Статическая проверка состоит в проверке равновесия любого узла или любой части системы от действия внешних и внутренних силовых факторов, приложенных к выделенной части.

Деформационная проверка заключается в проверке отсутствия перемещений основной системы по направлению отброшенных связей от действия заданной нагрузки и лишних неизвестных.

Условие примера

Балка постоянной изгибной жесткости *EJ* в пролетах статически нагружена (рис. 1.5, *а*). Требуется построить расчетные эпюры усилий и подобрать двутавровое сечение при $[\sigma]$ = 160 *МПа* = 16 *кН/см*^{2}.

Расчет

1. Степень статической неопределимости определяется по формуле

$$Л = Н – У = 4 – 3 = 1.$$

Неизвестными *Н* являются опорные реакции H_0, R_0, R_1, R_2. Число независимых уравнений равновесия для плоской задачи *У* = 3.

2. Выбор основной системы в виде двух шарнирно опертых балок (рис. 1.5, *б*) путем разреза балки шарниром над опорой 1. Такая основная система для многопролетной неразрезной балки называется *рациональной*.

3. Принимая за лишнее неизвестное изгибающий момент во введенном шарнире, составляем уравнение совместности деформаций в форме канонического уравнения метода сил:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0, \qquad (1.4)$$

где X_1 – искомый изгибающий момент в опорном сечении 1; δ_{11} – угловое перемещение на опоре 1 от $\overline{X}_1$ = 1; Δ_{1F} – угловое перемещение в том же сечении от нагрузки (рис. 1.5, *в*, *г*, *д*, *е*). Эпюры изгибающих моментов $\overline{M}_1^0$ и M_F^0 в основной системе строим в каждом пролете самостоятельно как обычно. Все здесь сказанное относится к основной системе и ее единичному (от $\overline{X}_1$ = 1) и грузовому (от всех нагрузок) состояниям.

4. Определение коэффициентов δ_{11} и Δ_{1F} выполняем по формуле Мора. Вычисления можно проводить способом Верещагина («перемножением» эпюр). При этом, чтобы не находить положение центра тяжести площади эпюры, можно использовать формулу трапеций или формулу Симпсона. Используем формулу Симпсона:

$$\Delta_i = \sum \frac{\ell_i}{6EJ_i}(a_л b_л + 4a_{ср}b_{ср} + a_{пр}b_{пр}); \qquad (1.5)$$

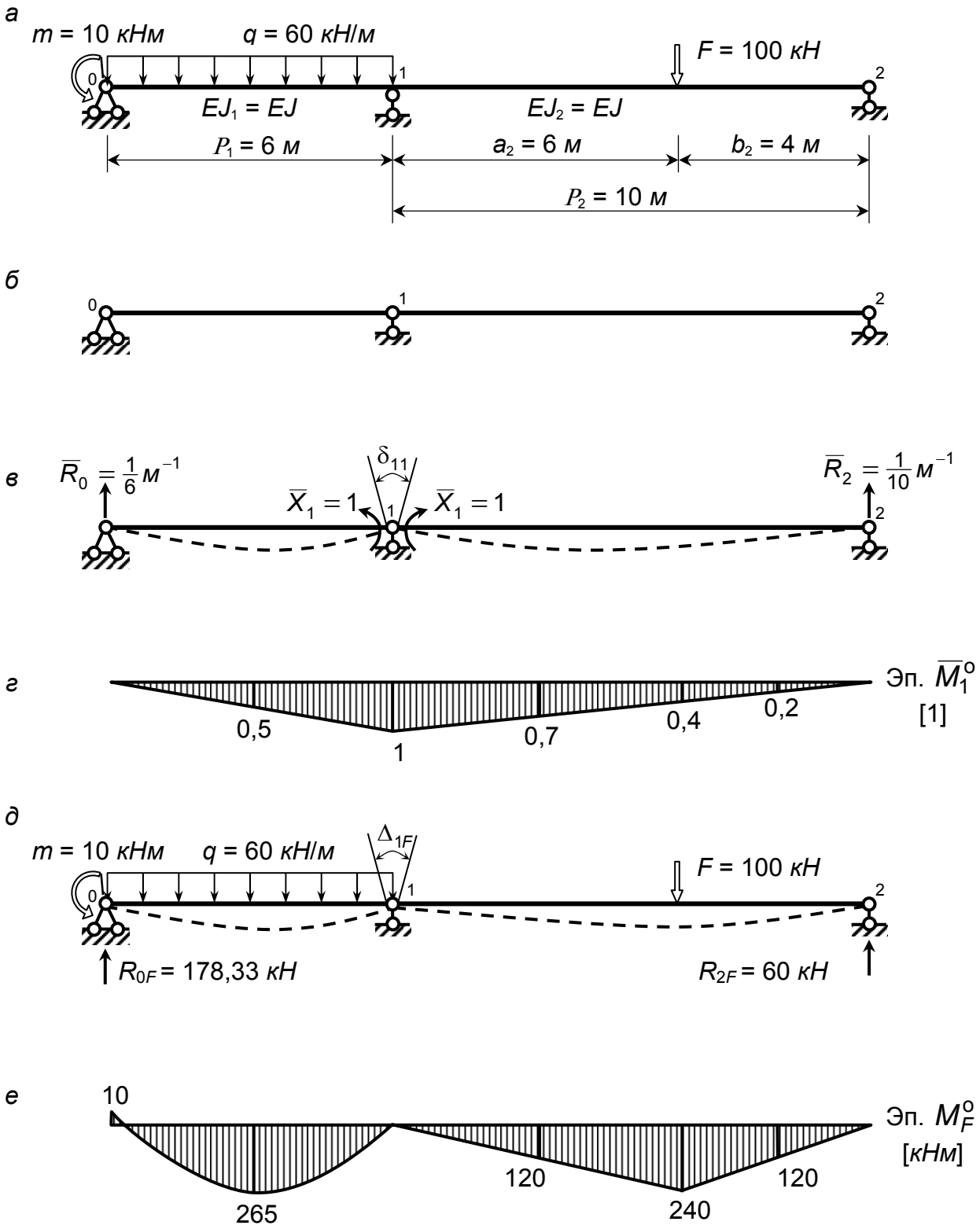


Рис. 1.5. Статически неопределимая балка: *а* – заданная система; *б* – основная статически определимая система; *в* – воздействие лишней неизвестной $\overline{X}_1$ = 1; *г* – эпюра изгибающих моментов от $\overline{X}_1$ = 1; *д* – воздействие нагрузки в основной системе; *е* – эпюра изгибающих моментов от нагрузки

$$\delta_{11} = "\overline{M}_1^0 \times \overline{M}_1^0" = \frac{6}{6EJ}(0 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 05 + 1 \cdot 1) + \frac{10}{6EJ}(1 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0) =$$

$$= \frac{5{,}333}{EJ}\left[\frac{1}{кНм}\right];$$

$$\Delta_{1F} = "M_F^0 \times \overline{M}_1^0" = \frac{6}{6EJ}(-10 \cdot 0 + 4 \cdot 265 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{6}{6EJ}(0 \cdot 1 + 4 \cdot 120 \cdot 0{,}7 + 240 \cdot 0{,}4) + \frac{4}{6EJ}(240 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 120 \cdot 0{,}2 + 0) =$$

$$= \frac{1090}{EJ}\ [1].$$

5. Лишнее неизвестное X_1 вычисляем из канонического уравнения

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1F}}{\delta_{11}} = -\frac{1090}{5{,}333} = -204{,}4\ кНм.$$

6. Строим истинную эпюру изгибающих моментов от X_1 (рис. 1.6, *б*) и, складывая ее алгебраически с грузовой эпюрой M_F^0 (рис. 1.6, *а*) по схеме $M_{расч} = M_F^0 + \overline{M}_1^0 X_1$, получаем окончательную (расчетную) эпюру изгибающих моментов (рис. 1.6, *в*). Она *обязательно* должна быть проверена! С этой целью выполним деформационную проверку

$$\varphi_1 = "M_{расч} \times \overline{M}_1^0" = 0,$$

где φ_1 – угол взаимного поворота сечений на опоре 1 (здесь его физически не должно быть!),

$$\varphi_1 = "M_{расч} \times \overline{M}_1^0" = \frac{6}{6EJ}(-10 \cdot 0 + 4 \cdot 162{,}8 \cdot 0{,}5 - 204{,}4 \cdot 1) +$$

$$+ \frac{6}{6EJ}(-204{,}4 \cdot 1 - 4 \cdot 23{,}08 \cdot 0{,}7 + 158{,}24 \cdot 0{,}4) +$$

$$+ \frac{4}{6EJ}(158{,}24 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 79{,}12 \cdot 0{,}2 + 0) =$$

$$= \frac{1}{EJ}(473{,}29 - 473{,}42) \approx 0.$$

Эпюра $M_{расч}$ верна.

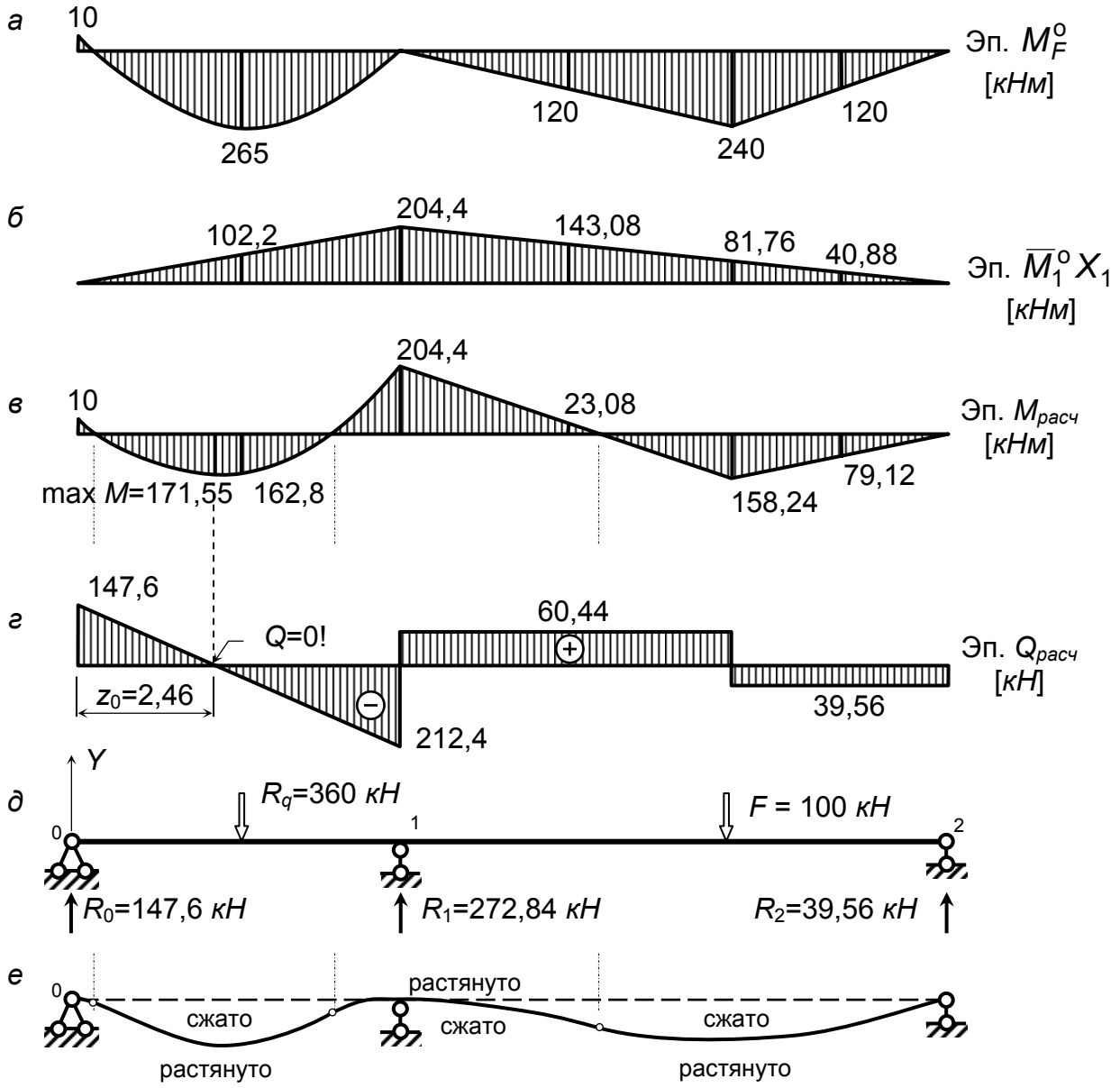


Рис. 1.6. Построение расчетных эпюр внутренних усилий: *а* – эпюра изгибающих моментов от нагрузки; *б* – эпюра изгибающих моментов от X_1 = –204,4 *кНм*; *в* – расчетная эпюра изгибающих моментов; *г* – расчетная эпюра поперечных сил; *д* – проверка равновесия балки в целом; *е* – схема изогнутой оси балки (упругая линия) (кружочками показаны точки перегиба оси)

7. Построение расчетной эпюры $Q_{расч}$ поперечных сил в данной задаче удобно выполнить по известной формуле

$$Q_{\substack{лев \\ прав}} = \pm \frac{q\ell_{уч}}{2} + \frac{M_{пр} - M_{лев}}{\ell_{уч}}, \qquad (1.6)$$

где $q = const$ – интенсивность равномерно распределенной нагрузки на участке; $\ell_{уч}$ – длина рассматриваемого участка; $M_{пр}$, $M_{лев}$ – изгибающие моменты на правом и левом концах участка, берущиеся со своим знаком.

I участок (первый пролет) – q = 60 *кН/м*; $\ell_{уч} = \ell_1 =$ 6 *м*;

$$Q_{\frac{лев}{прав}} = \pm\frac{60 \cdot 6}{2} + \frac{-204{,}4-(-10)}{6} = \pm 180 + 32{,}4;$$

$$Q_{лев} = 180 - 32{,}4 = 147{,}6\,кН; \quad Q_{прав} = -180 - 32{,}4 = 212{,}4\,кН.$$

II участок (левая часть пролета 2) – q = 0; $\ell_{уч} =$ 6 *м*;

$$Q_{\frac{лев}{прав}} = \frac{158{,}24-(-204{,}4)}{6} = 60{,}44\,кН = const.$$

III участок (правая часть пролета 2) – q = 0; $\ell_{уч} =$ 4 *м*;

$$Q_{\frac{лев}{прав}} = \frac{0-158{,}24}{4} = -39{,}56\,кН = const.$$

Эпюра $Q_{расч}$ приведена на рис. 1.6, *г*.

8. Определение опорных реакций и проверка равновесия балки в целом. Реакции опор легко устанавливаются по абсолютным значениям скачков на эпюре $Q_{расч}$ при ее обходе по контуру слева направо (рис. 1.6, *д*). Взяв сумму проекций всех сил на ось *Y*, имеем:

$$\sum Y = R_0 + R_1 + R_2 - R_q - F = 146{,}6 + 272{,}8 + 39{,}56 - 360 - 100 = 460 - 460 = 0,$$

где R_q – равнодействующая распределенной нагрузки.

Балка – в равновесии, расчет верен.

9. По виду эпюры $M_{расч}$ и с учетом, что балка скреплена с опорами, изображаем в произвольном масштабе схему изогнутой оси (рис. 1.6, *е*).

10. Подбор сечения балки по сортаменту ГОСТ 8239-89 (двутавры).

Сначала установим значение $\max M$ в первом пролете для сечения с абсциссой z_0 (там Q_{z_0} = 0) из условия $Q_{z_0} = \frac{dM_{z_1}}{dz_1} = 0$ или из условия $Q_{z_0} = R_0 - qz_0 = 0$, откуда:

$$z_0 = \frac{R_0}{q} = \frac{147{,}6}{60} = 2{,}46\,м \text{ (рис. 1.6, } г\text{).}$$

Тогда в первом пролете

$$\max M_{z_0} = R_0 z_0 - m - q\frac{z_0^2}{2} = 147{,}6 \cdot 2{,}46 - 10 - 60 \cdot \frac{2{,}46^2}{2} = 171{,}55 \ кНм.$$

Сравнивая наибольшие по абсолютной величине расчетные изгибающие моменты (см. рис. 1.6, *в*), устанавливаем опасное сечение на опоре 1 $|\max M| = 204{,}4$ *кНм*. Из условия прочности при изгибе

$$\max \sigma = \frac{|\max M|}{W_x} \text{ m } [\sigma] \pm 5\% \qquad (1.7)$$

ищем требуемый момент сопротивления:

$$W_x^{треб} \text{ l } \frac{|\max M|}{[\sigma]} = \frac{204{,}4 \cdot 10^2 \ кНсм}{16\,кН/см^2} = 1277{,}5\,см^3.$$

Проверим I № 45 с $W_x =$ 1231 *см*^{3}.

$$\max \sigma = \frac{204{,}4 \cdot 10^2}{1231} = 16{,}6\,кН/см^2 > [\sigma] \text{ на } 3{,}78\ \%.$$

Можно принять в целях экономии металла, так как масса балки подобранного двутавра составляет $G = \gamma\ell = 66{,}5\,кг/м \cdot 16\,м = 1064\,кг$, но с некоторым перенапряжением (< 5 %). Если взять I № 50 с $W_x =$ 1589 *см*^{3}, то масса балки составит $G = \gamma\ell = 78{,}5\,кг/м \cdot 16\,м = 1256\,кг$ с излишним запасом прочности:

$$\max \sigma = \frac{204{,}4 \cdot 10^2}{1589} = 12{,}86\,кН/см^2 < [\sigma] \text{ на } 19{,}6\ \%.$$

2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

При простых видах деформации (осевое растяжение или сжатие, сдвиг, кручение, плоский изгиб) в поперечных сечениях возникает только одно внутреннее усилие (продольная или поперечная сила, крутящий или изгибающий момент), за исключением плоского поперечного изгиба. На практике же большинство элементов конструкций и машин подвергается действиям сил, вызывающих одновременно не одну из указанных деформа-

ций, а две и более. Различные комбинации простых деформаций называются *сложным сопротивлением*.

В общем случае нагружения бруса в его поперечных сечениях действуют шесть компонентов внутренних усилий (N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, $M_{кр}$).

На основании *гипотезы о независимости действия сил* напряженное состояние стержня определяется суммированием напряженных состояний, вызванных каждым видом простого нагружения в отдельности. *Принцип суперпозиции* применим в тех случаях, когда деформации малы, а материал подчиняется *закону Гука*.

2.1. Задача 12. Одновременный изгиб призматической балки в главных ее плоскостях. Подбор сечения при сложном изгибе по допускаемым напряжениям

Основные понятия

Изгиб называется *косым*, если плоскость действия изгибающего момента (*силовая плоскость*), возникающего в поперечном сечении бруса, не совпадает ни с одной из его главных плоскостей. Различают *плоский косой изгиб* и *пространственный косой изгиб*. В первом случае упругая линия бруса – *плоская* кривая, во втором – *пространственная*.

Возникающий в поперечном сечении изгибающий момент раскладывают на два изгибающих момента, действующих в плоскостях, проходящих через главные оси сечения.

При косом изгибе нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения с координатами (x, y) будут равны алгебраической сумме напряжений от изгиба в обеих плоскостях

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x .$$

Для сечений с двумя осями симметрии, имеющих одинаково удаленные от главных осей угловые точки (например, прямоугольник, двутавр), условие прочности записывается в виде

$$\max \sigma = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \text{ m } [\sigma].$$

Для расчета на прочность бруса с поперечным сечением произвольной формы следует определить положение *нулевой* (нейтральной) линии, проходящей через центр тяжести сечения. Тангенс угла наклона нулевой линии с осью 0x определяется как

$$tg\ \alpha_0 = \left| \frac{M_y J_x}{M_x J_y} \right| .$$

Максимальные нормальные напряжения возникают в наиболее удаленных от нулевой линии точках поперечного сечения.

Для сечений круглого сплошного, кольцевого, квадратного и других сечений, у которых все центральные оси главные, косой изгиб невозможен. Расчет производится по результирующему изгибающему моменту

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}\,,$$

как в случае обычного плоского изгиба

$$\max\sigma = \frac{M_u}{W_u} \text{ m } [\sigma].$$

Условие примера

Деревянная балка прямоугольного поперечного сечения $t \times h$ (рис. 2.1) подвергается сложному изгибу. Требуется подобрать размеры сечения из условия прочности по нормальным напряжениям. Допускаемое напряжение $[\sigma] = 12$ *МПа* = 1,2 *кН/см*^{2}. Отношение поперечных размеров h / t = 1,5. Линейные размеры балки и нагрузка даны на рис. 2.2.

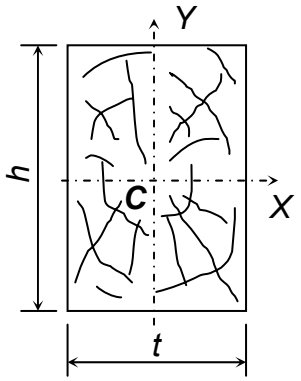


Рис. 2.1. Поперечное сечение

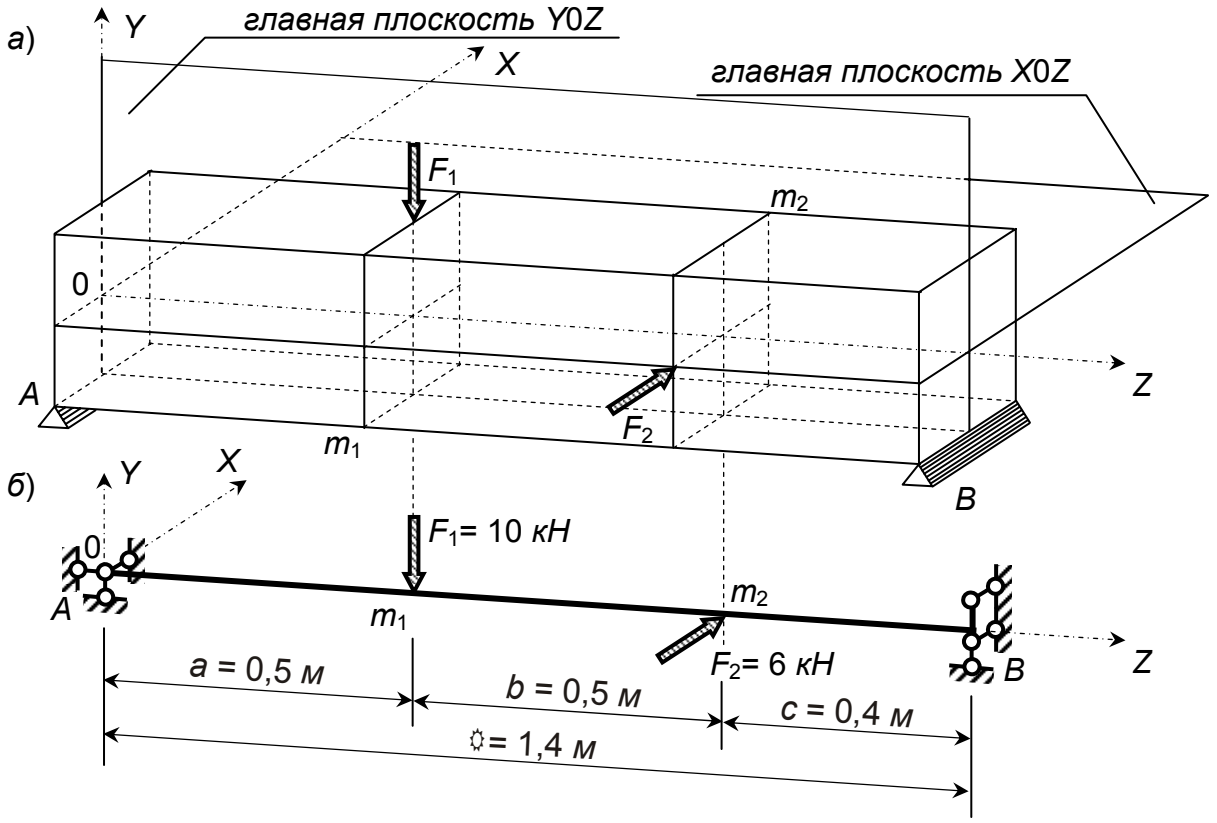


Рис. 8. Исходные данные: *а* – заданная балка; *б* – расчетная схема

Расчет

1. Построение эпюр изгибающих моментов выполняется обычным образом в плоскостях $X0Z$ и $Y0Z$ (рис. 2.3).

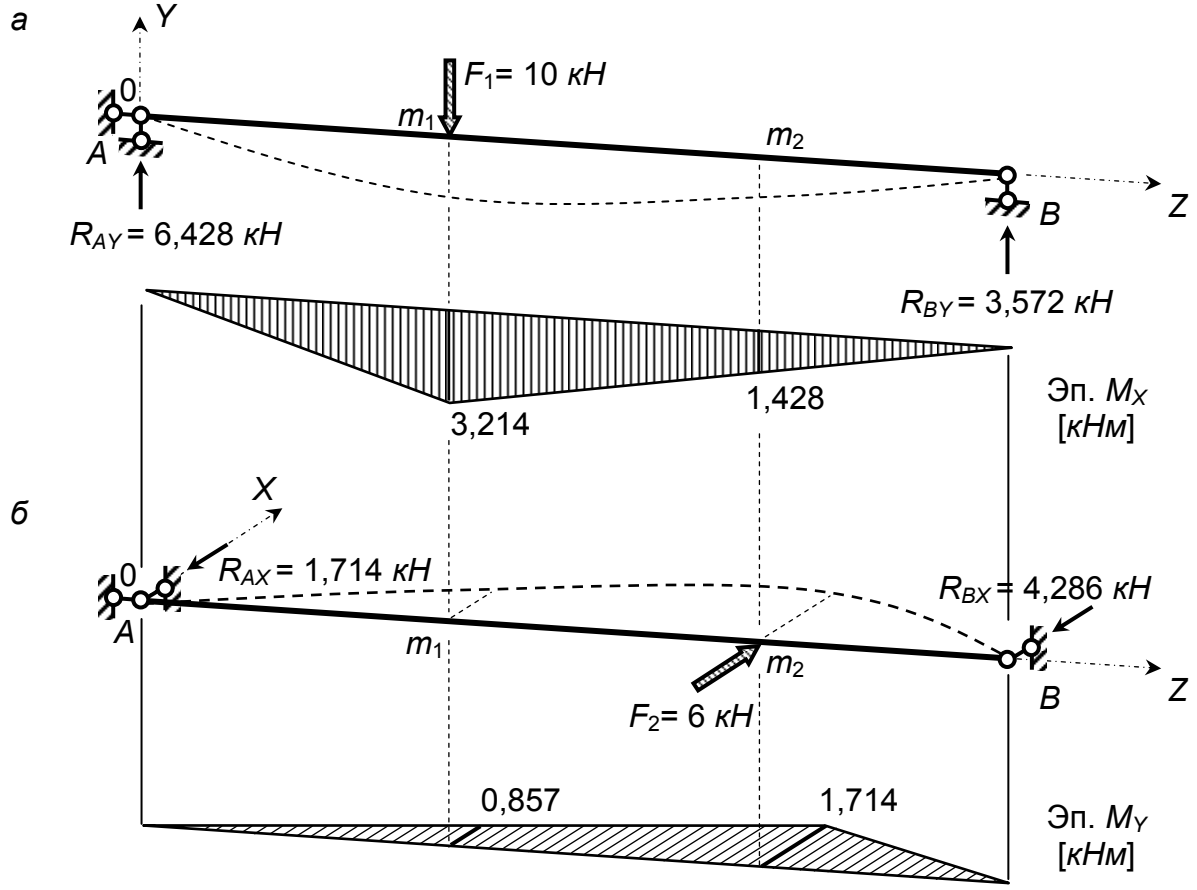


Рис. 2.3. Эпюры изгибающих моментов: *а* – в плоскости $Y0Z$; *б* – в плоскости $X0Z$

2. В рассматриваемом случае условие прочности имеет вид:

$$\max \sigma = \frac{|M_X|}{W_X} + \frac{|M_Y|}{W_Y} \text{ m } [\sigma] , \qquad (2.1)$$

где $|M_X|$, $|M_Y|$ – абсолютные величины изгибающих моментов в опасных сечениях балки; W_X, W_Y – моменты сопротивления относительно главных центральных осей сечения.

Условие прочности преобразуем к виду, удобному для расчета. Моменты сопротивления вычисляются по формулам:

$$W_X = \frac{t\,h^2}{6}, \quad W_Y = \frac{t^2\,h}{6}. \qquad (2.2)$$

Вынося за скобку слагаемое $\frac{|M_X|}{W_X}$ и учитывая, что $t = \frac{h}{1{,}5}$, получим,

$$\max\sigma = \frac{9|M_X|}{h^3}\left(1 + 1{,}5\frac{|M_Y|}{|M_X|}\right) \text{ m } [\sigma], \qquad (2.3)$$

откуда размер h выражается как

$$h \text{ l } \sqrt[3]{\frac{9|M_X|}{[\sigma]}\left(1 + 1{,}5\frac{|M_Y|}{|M_X|}\right)}. \qquad (2.4)$$

Опасным является сечение m_1 или m_2 (рис. 2.3, *а*, *б*). По сечению m_1 получим

$$h_1 \text{ l } \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 3{,}214 \cdot 10^2}{1{,}2}\left(1 + 1{,}5\frac{0{,}857 \cdot 10^2}{3{,}214 \cdot 10^2}\right)} = 15 \text{ см}.$$

В свою очередь по сечению m_2

$$h_2 \text{ l } \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 1{,}428 \cdot 10^2}{1{,}2}\left(1 + 1{,}5\frac{1{,}714 \cdot 10^2}{1{,}428 \cdot 10^2}\right)} = 14{,}4 \text{ см}.$$

Имеем два результата: сечение m_1 f h_1 = 15 *см*; t_1 = 15/1,5 = 10 *см*; сечение m_2 f h_2 = 14,4 *см*; t_2 = 14,4/1,5 = 9,6 *см*.

Естественно принимаем больший из размеров $t \times h$ = 10 × 15 *см*.

Заметим, что для элементов конструкций из древесины вычисляемые размеры принято, по технологическим соображениям округлять до целых сантиметров в большую сторону. Например, пусть расчетом получены размеры h = 21,3 *см*, t = 12,6 *см*. Следует принять h = 22 *см*, t = 13 *см*.

3. Построение эпюры нормальных напряжений в опасном сечении m_1. Предварительно подсчитаем отношение осевых моментов инерции

$$\frac{J_X}{J_Y} = \frac{t\,h^3}{12} \cdot \frac{12}{t^3\,h} = \frac{h^2}{t^2} = \frac{15^2}{10^2} = 2{,}25.$$

Тогда положение нулевой линии в сечении определится как

$$tg\,\alpha_0 = \frac{|M_Y|}{|M_X|} \cdot \frac{J_X}{J_Y} = \frac{0{,}857}{3{,}214} \cdot 2{,}25 = 0{,}6.$$

Угол наклона нулевой линии $\alpha_0 \cong 31^\circ$. Эпюра σ дана на рис. 2.4. Напряжения в опасных точках сечения

$$\frac{\max}{\min}\sigma = \pm\frac{9\cdot 3{,}214\cdot 10^2}{15^3}\left(1+1{,}5\frac{0{,}857}{3{,}214}\right) = 1{,}199\,кН/см^2 \cong 12\,МПа\,.$$

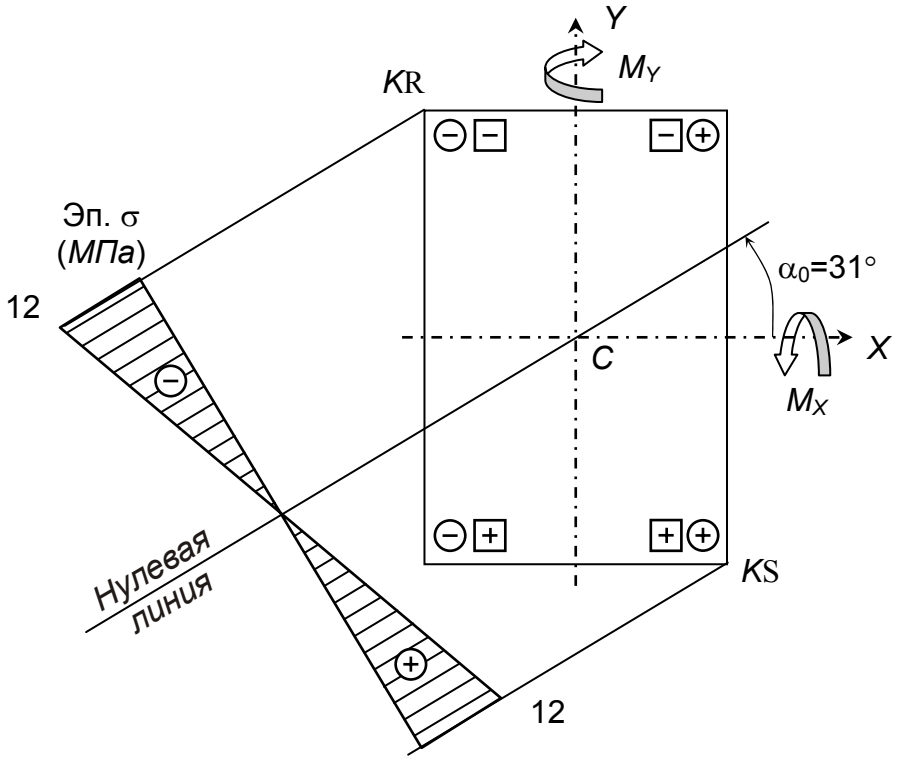


Рис. 2.4. Эпюра нормальных напряжений σ и положение нулевой линии

2.2. Задача 13. Сложное сопротивление жесткого бруса

Основные понятия

В случае совместного действия на балку косого изгиба и осевого растяжения или сжатия в соответствии с принципом независимости действия сил нормальные напряжения в произвольной точке поперечного сечения с координатами (x, y) определяют по формуле

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x}y + \frac{M_y}{J_y}x\,.$$

Для стержней из материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие с поперечными сечениями, имеющими угловые точки, равноудаленные от главных осей (например, прямоугольник, двутавр), условие прочности имеет вид

$$\max\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \text{ m } [\sigma].$$

Нулевая линия при действии изгиба с растяжением или сжатием не проходит через центр тяжести поперечного сечения. Абсолютные величины отрезков a_x и a_y, отсекаемых нулевой линией на осях координат, определяются из выражений:

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \left|\frac{N}{M_y}\frac{J_y}{A}\right| = \left|\frac{N}{M_y} i_y^2\right|; \\ a_y &= \left|\frac{N}{M_x}\frac{J_x}{A}\right| = \left|\frac{N}{M_x} i_x^2\right|, \end{aligned}\right\}$$

где i_x и i_y – главные радиусы инерции сечения.

В случае, когда параллельная оси стержня нагрузка приложена внецентренно (с эксцентриситетом), возникает *внецентренное растяжение* (*сжатие*). Внутренние усилия:

$$N = F;\ \ M_x = Fy_F;\ \ M_y = Fx_F,$$

где F – величина приложенной силы; y_F и x_F – координаты точки приложения нагрузки. Напряжения в произвольной точке сечения вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A}\left(1 + \frac{x_F}{i_y^2}x + \frac{y_F}{i_x^2}y\right).$$

Выпуклая область вокруг центра тяжести сечения, внутри которой приложение силы F вызывает во всех точках поперечного сечения напряжения одного знака, называется *ядром сечения*. Для построения ядра сечения необходимо задаться различными положениями нулевой линии, проводя ее касательно к контуру и нигде не пересекая его, и вычислить координаты соответствующих точек приложения силы по формулам:

$$y_я = -\frac{i_x^2}{a_y};\ x_я = -\frac{i_y^2}{a_x}.$$

Вычисленные точки определяют контур ядра сечения.

Условие примера

Для бруса определить грузоподъемность $[F]$ при K_1 = 0,5; K_2 = 2; $[\sigma] = 20$ *МПа* = 2 *кН/см*^{2} из условия прочности по нормальным напряжениям. Схема поперечного сечения показана на рис. 2.5. Схема бруса и нагрузки дана на рис. 2.6.

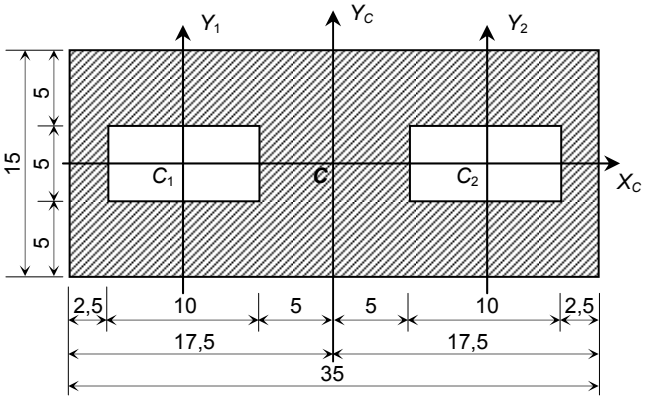


Рис. 2.5. Поперечное сечение (размеры указаны в сантиметрах)

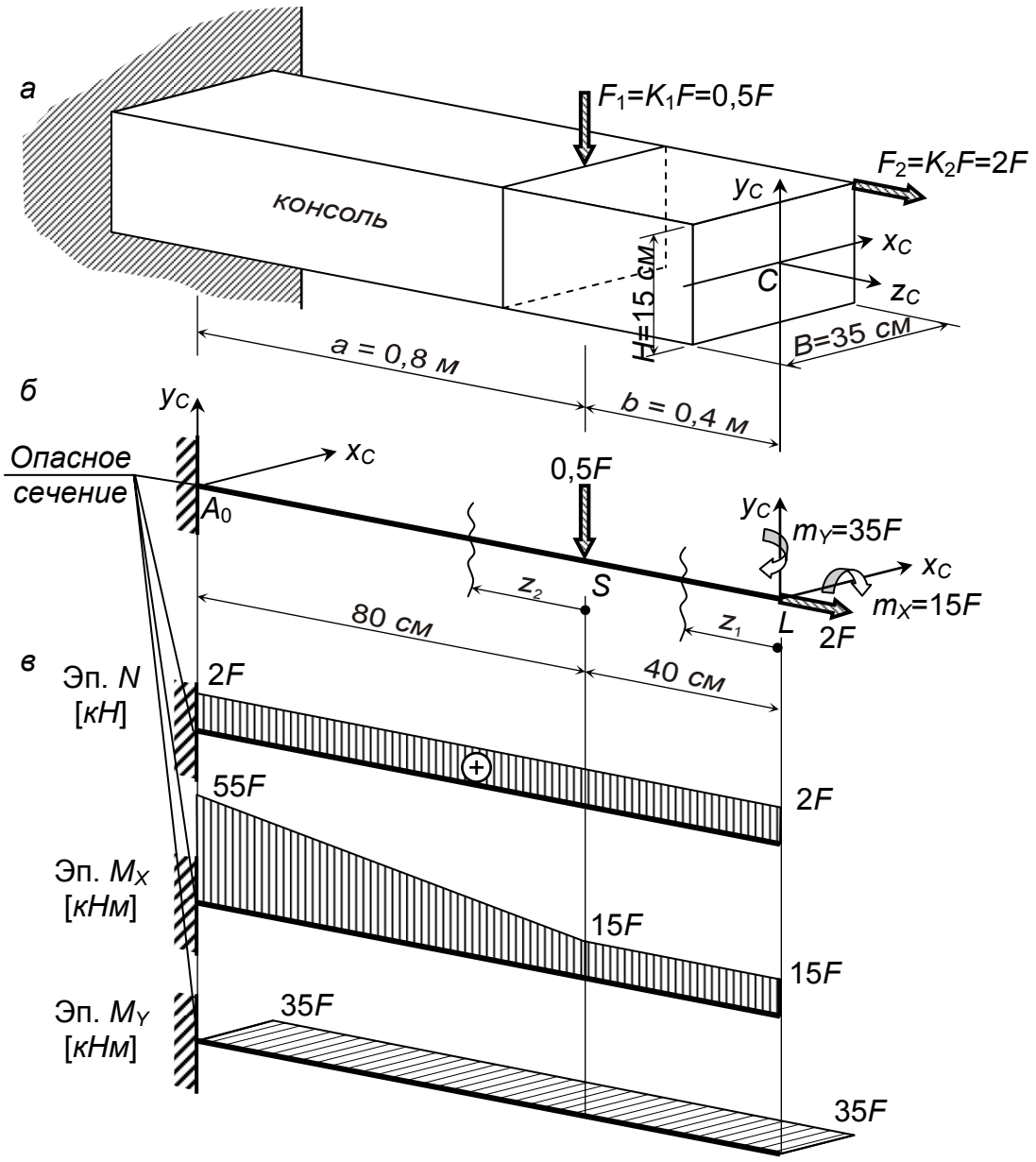


Рис. 2.6. Сложное сопротивление жесткого бруса: *а* – заданная система; *б* – приведение сил к главным осям; *в* – эпюры внутренний усилий

Расчет

1. Геометрические характеристики сечения.

В силу симметрии сечения оси $x_C C y_C$ – главные.

Площадь $A = 35 \cdot 15 - 2 \cdot 10 \cdot 5 = 425$ *см*^{2}.

Главные центральные моменты инерции:

$$J_{x_C} = \frac{35 \cdot 15^3}{12} - 2 \cdot \frac{10 \cdot 5^3}{12} = 9635 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = \frac{35^3 \cdot 15}{12} - 2\left(\frac{10^3 \cdot 5}{12} + 10^2 \cdot 5 \cdot 10\right) = 42760 \ см^4.$$

Моменты сопротивления:

$$W_{x_C} = \frac{J_{x_C}}{y_{\max}} = \frac{9635}{7{,}5} = 1285 \ см^3;$$

$$W_{y_C} = \frac{J_{y_C}}{x_{\max}} = \frac{42760}{17{,}5} = 2443 \ см^3.$$

Радиусы инерции:

$$i_{x_C} = \sqrt{\frac{J_{x_C}}{A}} = \sqrt{\frac{9635}{425}} = 4{,}76 \ см; \quad i_{y_C} = \sqrt{\frac{J_{y_C}}{A}} = \sqrt{\frac{42760}{425}} = 10{,}03 \ см.$$

Квадраты радиусов инерции:

$$i_{x_C}^2 = 4{,}76^2 = 22{,}66 \ см^2;$$
$$i_{y_C}^2 = 10{,}03^2 = 100{,}6 \ см^2.$$

2. Приведение внешних сил к главным осям торцового сечения консоли (рис. 2.7).

Перенося силу $F_2 = 2F$ к центру C сечения, получаем эквивалентную систему нагрузок на торце консоли, включающую силу $2F$ и моменты относительно осей x_C и y_C:

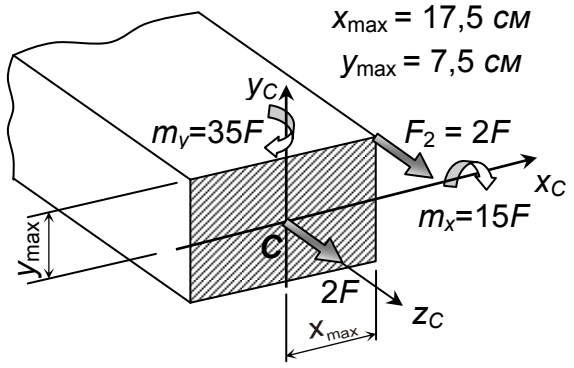


Рис. 2.7. Приведение нагрузки к главным осям торцевого сечения

$$m_x = 2Fy_{\max} = 2F \cdot 7{,}5 = 15F \ кНсм;$$

$$m_y = 2Fx_{\max} = 2F \cdot 17{,}5 = 35F \ кНсм.$$

3. Построение эпюр усилий (рис. 2.6, *в*).

Участок *SL*.

$N = 2F = const$ – растяжение;

$M_x = m_x = 15F \ кНсм = const$ – растянуты верхние волокна;

$M_y = m_y = 35F \ кНсм = const$ – растянуты правые волокна.

Участок A_0S.

$N = 2F = const$ – растяжение;

$M_x = m_x + F_1 z_2 = 15F + 0{,}5F \cdot z_2$ – растянуты верхние волокна;

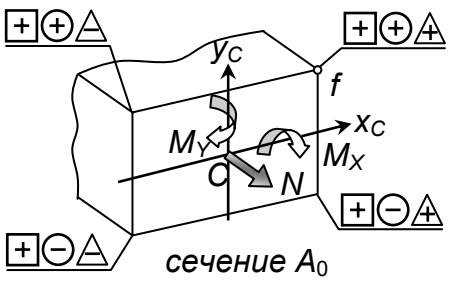


Рис. 2.8. Определение опасной точки в опасном сечении

$M_x(0) = 15F$ *кНсм*;

$M_x(80) = 15F + 0{,}5F \cdot 80 = 55F$ *кНсм*;

$M_y = m_y = 35F$ *кНсм* $= const$ – растянуты правые волокна.

4. Условие прочности для опасной точки опасного сечения A_0.

В угловых точках показаны знаки нормальных напряжений от N (□), M_X (○), M_Y (△). Опасной является точка f (рис. 14).

Условие прочности для опасной точки f имеет вид

$$\max \sigma_f = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{W_{x_C}} + \frac{M_y}{W_{y_C}} \text{ m } [\sigma]. \qquad (4.1)$$

При подстановке в условие прочности внутренних усилий в опасном сечении $N = 2F$, $M_X = 55F$, $M_Y = 35F$ получим

$$[F] \text{ m } \frac{A[\sigma]}{2\left(1 + \frac{55A}{2W_{X_C}} + \frac{35A}{2W_{Y_C}}\right)} = \frac{425 \cdot 2}{2\left(1 + \frac{55 \cdot 425}{2 \cdot 1285} + \frac{35 \cdot 425}{2 \cdot 2443}\right)} = 32{,}3 \text{ кН}.$$

Итак, допускаемая грузоподъемность соответствует нагрузке $F_1 = 0{,}5F = 16{,}15$ *кН*, $F_2 = 2F = 64{,}6$ *кН*.

5. Построение ядра сечения (рис. 2.9).

Координаты угловых точек ядра в осях $x_C C y_C$ вычисляются по формулам:

$$x_я = -\frac{i_{y_C}^2}{a_x}; \qquad y_я = -\frac{i_{x_C}^2}{a_y}, \qquad (2.6)$$

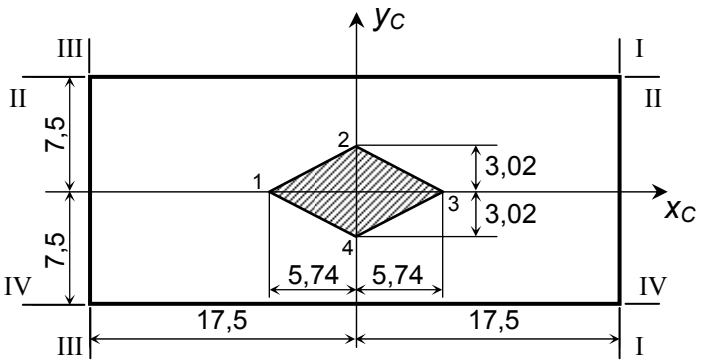


Рис. 2.9. Ядро сечения (размеры указаны в сантиметрах)

где a_X, a_Y – отрезки, отсекаемые на главных осях касательными к контуру сечения нулевыми линиями I, II, III, IV, откуда получим координаты точек 1, 2, 3, 4. Например, задав нулевую линию I–I, имеем $a_X = +17{,}5$ см, $a_Y = \times$, так что координаты точки 1 $x_1 = -\frac{100{,}6}{17{,}5} = -5{,}74$ *см*; $y_1 = -\frac{22{,}66}{\infty} = 0$ и т. д. Координаты точек:

т. 2 ($x_2 = 0$; $y_2 = +3{,}02$ *см*);
т. 3 ($x_3 = +5{,}74$ *см*; $y_3 = 0$);
т. 4 ($x_4 = 0$; $y_4 = -3{,}02$ *см*).

2.3. Задача 14. Проверка прочности стержня круглого поперечного сечения при сложном напряженном состоянии

Основные понятия

Одновременное действие изгиба и кручения приводит к возникновению в опасной точке поперечного сечения бруса плоского напряженного состояния, поэтому для определения эквивалентного напряжения $\sigma_э$ через нормальные σ и касательные τ напряжения используют одну из теорий прочности:

1. Теория наибольших нормальных напряжений (для весьма хрупких и достаточно однородных материалов – стекло, гипс, керамика):

$$\sigma_э^{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left[\sigma_и + \sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2}\right] \text{ m } [\sigma].$$

2. Теория наибольших удлинений (формула Сен-Венана – для хрупких материалов):

$$\sigma_э^{\mathrm{II}} = \left[0{,}35\sigma_и + 0{,}65\sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2}\right] \text{ m } [\sigma].$$

3. Теория наибольших касательных напряжений (для материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию):

$$\sigma_э^{\mathrm{III}} = \sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2} \text{ m } [\sigma].$$

4. Энергетическая теория (критерий удельной потенциальной энергии формоизменения – для пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию):

$$\sigma_э^{\mathrm{IV}} = \sqrt{\sigma_и^2 + 3\tau_к^2} \text{ m } [\sigma].$$

5. Гипотеза прочности Мора (для материалов, имеющих различную прочность на растяжение и сжатие – легированная сталь, чугун, некоторые сплавы):

$$\sigma_э^{\mathrm{V}} = \frac{1-m}{2}\sigma_и + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma_и^2 + 4\tau_к^2} \text{ m } [\sigma],$$

где m – отношение пределов прочности на растяжение и сжатие.

Условие примера

Для конструкции (рис. 2.10), у которой участок A_0–B круглого сечения, проверить прочность в опасной точке участка A_0–B при $[\sigma] = 160$ *МПа* = 16 *кН/см*^{2}.

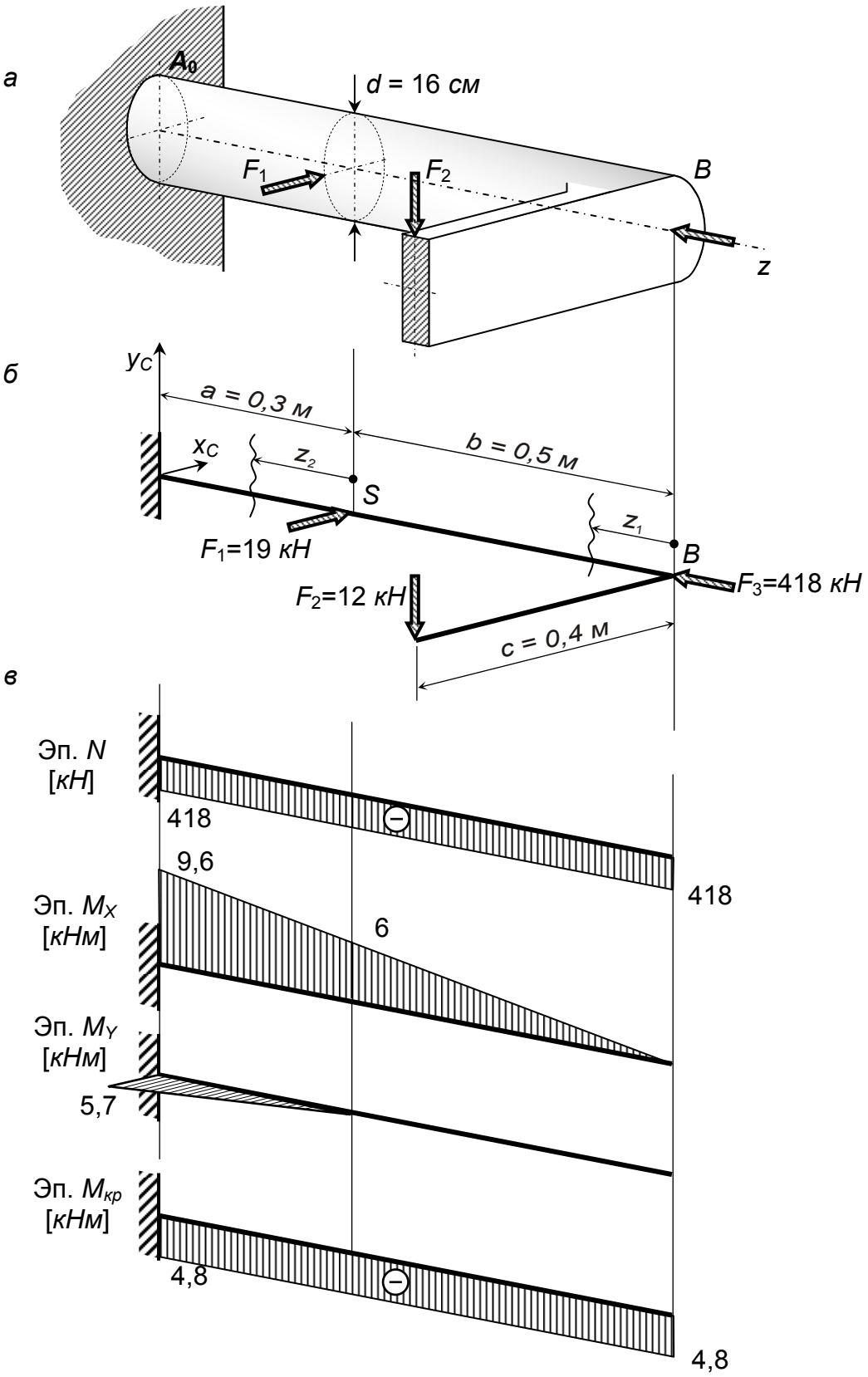


Рис. 2.10. Сложное сопротивление круглого стержня: *а* – заданная система; *б* – расчетная схема; *в* – эпюры внутренних усилий

Расчет

1. Построение эпюр усилий на участке A_0–*B.* По рис. 2.10, *б* имеем следующее.

Участок *S*–*B*: 0 m z_1 m 0,5 *м*;

$N_{z_1} = \sum F_z^{пр} = -F_3 = -418\,кН = const$ – сжатие;

$M_{x(z_1)} = \sum m_x^{пр} = -F_2 z_1 = -12 z_1$ – растянуты верхние волокна;

$M_{x(0)} = 0$; $M_{x(0,5)} = -12 \cdot 0{,}5 = -6\,кНм$;

$M_{y(z_1)} = 0 = const$;

$M_{z(z_1)} = M_{кр} = \sum m_z^{пр} = -F_2 c = -12 \cdot 0{,}4 = -4{,}8\,кНм = const$.

Участок A_0–*S*: 0 m z_2 m 0,3 *м*;

$N_{z_2} = \sum F_z^{пр} = -F_3 = -418\,кН = const$ – сжатие;

$M_{x(z_2)} = \sum m_x^{пр} = -F_2(0{,}5 + z_2) = -6 - 12 z_2$ – растянуты верхние волокна;

$M_{x(0)} = -6\,кНм$; $M_{x(0,3)} = -6 - 12 \cdot 0{,}3 = -9{,}6\,кНм$;

$M_{y(z_2)} = \sum m_y^{пр} = F_1 z_2 = 19 z_2$ – растянуты ближние волокна;

$M_{y(0)} = 0$; $M_{y(0,3)} = 19 \cdot 0{,}3 = 5{,}7\,кНм$;

$M_{z(z_2)} = M_{кр} = \sum m_z^{пр} = -F_2 c = -12 \cdot 0{,}4 = -4{,}8\,кНм = const$.

В рассматриваемом случае влиянием поперечных сил Q_x и Q_y пренебрегаем из-за их малой величины, поэтому эпюры Q_x и Q_y не приводятся.

2. Установление опасной точки в опасном сечении.

Опасным сечением участка A_0–*B* является сечение A_0 (защемление), так как в этом сечении все усилия имеют наибольшее значение.

В сечении действуют два изгибающих момента $M_x = 9{,}6$ *кНм* и $M_y = 5{,}7$ *кНм*, векторная диаграмма которых показана на рис. 2.11. Результирующий изгибающий момент для круглого сечения

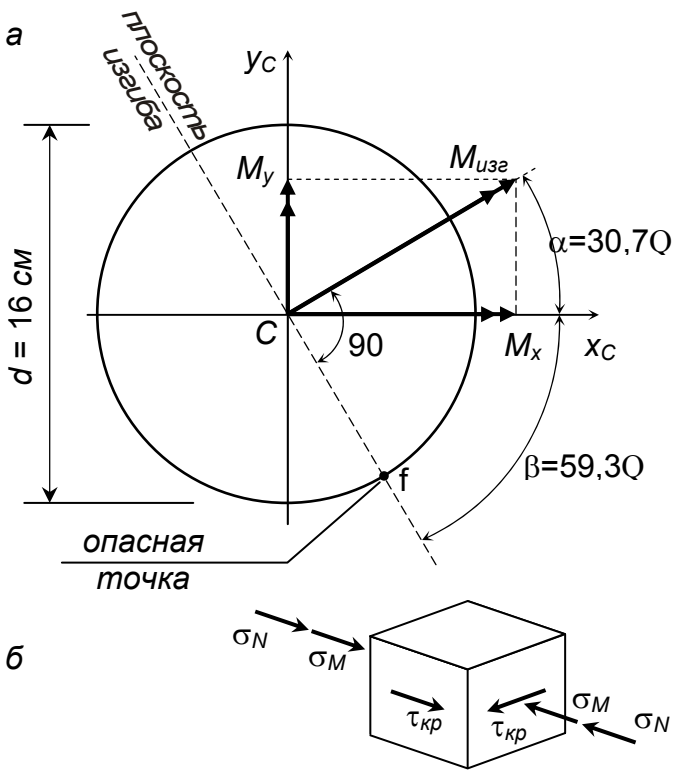


Рис. 2.11. Опасное сечение A_0: *а* – к определению положения опасной точки; *б* – напряженное состояние в опасной точке

$$M_{изг} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{9{,}6^2 + 5{,}7^2} = 11{,}16\,кНм$$

и в точке *f* вызывает нормальное напряжение $\max\sigma = -\dfrac{M_{изг}}{W_x}$.

Плоскость изгиба проходит через центр тяжести сечения и ее положение определяется углом

$$\beta = 90^\circ - arctg\frac{|M_y|}{|M_x|} \approx 59{,}3^\circ .$$

3. Проверка прочности по теории наибольших касательных напряжений (третья теория прочности).

В опасной точке *f*, помимо напряжения σ_M, возникает нормальное напряжение от продольной силы $N = -418$ *кН* и от крутящего момента $M_{кр} = 4{,}8$ *кНм*, касательное напряжение

$$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}}.$$

Полное нормальное напряжение в точке *f* составит

$$\sigma = \sigma_M + \sigma_N = -\frac{M_{изг}}{W_x} - \frac{N}{A} = -\frac{11{,}16 \cdot 10^2\,кНсм}{402\,см^3} - \frac{418\,кН}{200\,см^2} = -4{,}87\ кН/см^2,$$

где $W_x = \dfrac{\pi d^3}{32} = \dfrac{3{,}14 \cdot 16^3}{32} = 402\ см^3$ – осевой момент сопротивления круглого поперечного сечения; $A = \dfrac{\pi d^2}{4} = \dfrac{3{,}14 \cdot 16^2}{4} = 200\ см^2$ – площадь поперечного сечения.

Касательное напряжение в точке *f* составит

$$\tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_{кр}} = -\frac{4{,}8 \cdot 10^2\,кНсм}{803{,}8\,см^3} = -0{,}6\ кН/см^2,$$

где $W_{кр} = W_\rho = \dfrac{\pi d^3}{16} = \dfrac{3{,}14 \cdot 16^3}{16} = 803{,}8\ см^3$ – полярный момент сопротивления.

Эквивалентное напряжение по третьей теории прочности

$$\sigma_{экв}^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau_{кр}^2} = \sqrt{4{,}87^2 + 4 \cdot 0{,}6^2} = 5{,}02\ кН/см^2 < [\sigma] = 16\ кН/см^2.$$

Прочность обеспечена с большим запасом.

3. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ, ДИНАМИКУ И ВЫНОСЛИВОСТЬ

3.1. Задача 15. Расчеты на устойчивость центрально сжатых прямых стержней

Основные понятия

В системах, находящихся в деформированном состоянии (например, сжатых), упругое равновесие между силами внешними (нагрузкой) и внутренними (усилиями) может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Упругое равновесие устойчиво, если, например, сжатый стержень при малом отклонении боковой силой *P* стремится возвратиться к первоначальному состоянию и возвращается после удаления силы *P*. Если же после малого отклонения (рис. 3.1, *б*) и удаления силы P стержень продолжает искривляться, это явление называется *потерей устойчивости* деформированного состояния тела (явление выпучивания). Потеря устойчивости первоначальной формы равновесия для большинства элементов конструкций является причиной исчерпания их работоспособности, что может привести к катастрофе всей конструкции. Случаи такие не единичны. Та сжимающая нагрузка, при которой сжатый стержень перестает быть устойчивым в отношении любого малого отклонения, называется *критической силой* $F_{кр}$.

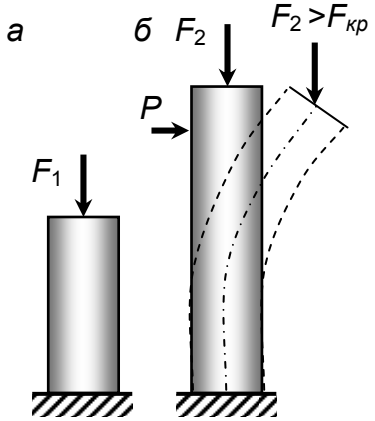


Рис. 18. Упругое равновесие: *а* – устойчивое; *б* – неустойчивое

Пусть сжатию подвергаются два стержня (рис. 3.1, *а*, *б*) из одного материала и одинакового поперечного сечения, но разной длины. Оказывается, что короткий стержень выдержит нагрузку F_1 бóльшую, нежели длинный ($F_1 > F_2$). Это объясняется тем, что короткий стержень продолжает, оставаясь прямым, работать вплоть до разрушения материала и для него критической силой является $F_{1кр} = A\sigma_{оп}$, где $\sigma_{оп}$ – опасное для данного материала напряжение (для хрупкого – предел прочности $\sigma_{пч}$ Þ $\sigma_{вр}$, для пластичного – предел текучести $\sigma_т$), *A* – площадь поперечного сечения. При загружении же длинного стержня нагрузка F_2 не успевает достигнуть значения $F_{1кр}$, так как до этого стержень выпучится (потеряет устойчивость), т.е. достигнет критического, опасного для себя значения нагрузки $F_{2кр}$. Насколько опасно приближение величины нагрузки к значению $F_{2кр}$ видно из рис. 3.2, где превышение нагрузкой значения $F_{2кр}$ всего на 6,3 % вызывает огромные деформации (прогибы), т. е. по существу катастрофическую ситуацию.

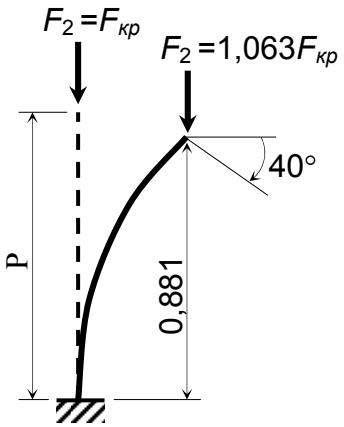


Рис. 3.2. Потеря устойчивости

Грозное явление! Что и было продемонстрировано крушением огромного моста (г. Квебек, Канада). Итак, устойчивость сжатых стержней при прочих равных условиях определяется их длиной, что характеризуется безразмерной величиной, так называемой гибкостью

$$\lambda = \frac{\mu \ell}{i}, \qquad (3.1)$$

где μ – коэффициент, учитывающий способ закрепления концов сжатого стержня (коэффициент приведения длины), определяется согласно прил. 1, рисунок; P – реальная длина стержня; $i = \sqrt{\frac{J}{A}}$ – радиус инерции; J – момент инерции; A – площадь поперечного сечения. С точки зрения гибкости $\lambda_{ст}$ стержни принято подразделять на три категории (рис. 3.3): стержни большой гибкости ($\lambda_{ст} \geq \lambda_{пр}$), средней гибкости ($\lambda_0 < \lambda_{ст} < \lambda_{пр}$) и малой гибкости ($\lambda_{ст} \leq \lambda_0$), где для стержней из малоуглеродистой стали Ст3 λ_0 = 60, предельная гибкость

$$\lambda_{пр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}} \cong \sqrt{\frac{10 \cdot 2 \cdot 10^5\, МПа}{200\, МПа}} \cong 100. \qquad (6.2)$$

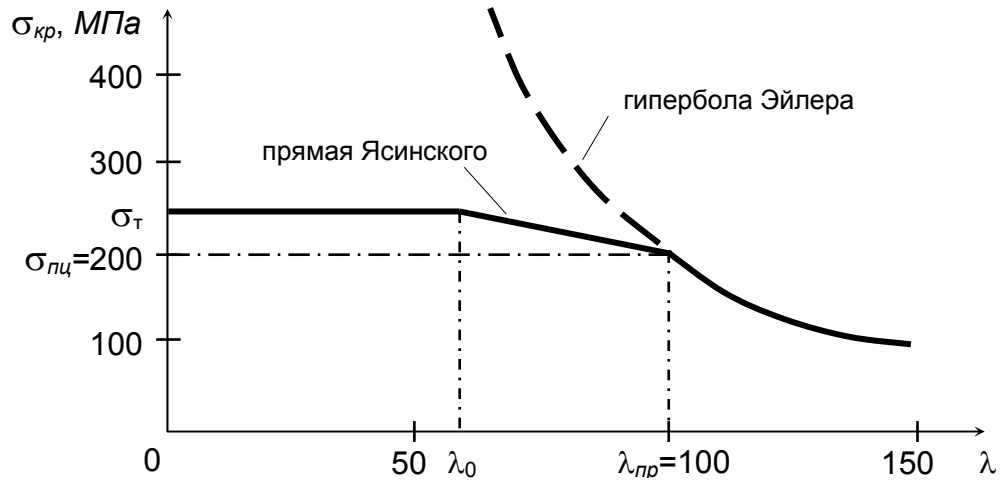


Рис. 3.3. Зависимость между критическими напряжениями и гибкостью стержня из малоуглеродистой стали

При вычислении коэффициента запаса устойчивости $K_y = F_{кр} / F_{раб}$ для сжатых стержней критическая нагрузка $F_{кр}$ в зависимости от гибкости $\lambda_{ст}$ определяется по формулам:

– при $\lambda_{ст} \le \lambda_0$ $F_{кр} = A\sigma_т$;

– при $\lambda_0 < \lambda_{ст} < \lambda_{пр}$ $F_{кр} = (a - b\lambda_{ст})A$ (Ф.С. Ясинского);

– при $\lambda_{ст} \ge \lambda_{пр}$ $F_{кр} = \dfrac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu \ell)^2}$ (формула Эйлера), где $J_{\min}$ – главный момент инерции сечения.

Для Ст3 a = 310 *МПа* = 31 *кН/см*^{2}; b = 1,14 *МПа* = 0,114 *кН/см*^{2}.

Условие примера

Для центрально сжатой стальной стойки, закрепленной в соответствии с рис. 3.4, при $[\sigma]$ = 160 *МПа*, требуется:

1) из условия устойчивости определить грузоподъемность $[F]$ стойки, имеющей поперечное сечение в виде двутавра I № 30;

2) найти критическую силу $F_{кр}$ и коэффициент запаса по устойчивости;

3) загружая стойку нагрузкой $[F]$, определенной в п. 1 данной задачи, подобрать поперечное сечение в виде:

а) кольца с соотношением внутреннего и наружного диаметров α = 0,76;

б) составного сечения из двух прокатных профилей (подбор сечения провести исходя из условия равноустойчивости в обеих плоскостях: $\lambda_x = \lambda_y$).

Расчет

1. В соответствии с характером закрепления концов стойки устанавливаем коэффициенты приведения длины (рис. 3.4): при возможном выпучивании в плоскости $y0z$ берем μ_x = 0,5, в плоскости же $x0z$ – μ_y = 0,7. Допускаемая нагрузка определяется по формуле

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} \le [\sigma], \qquad (3.3)$$

применяемой в практических расчетах на устойчивость.

Тогда $[F] \le \varphi A[\sigma]$, где А – площадь поперечного сечения; φ – коэффициент продольного изгиба (коэффициент снижения основного допускаемого напряжения), зависящий от гибкости и материала стойки.

Начинаем с определения гибкостей в обеих главных плоскостях стойки.

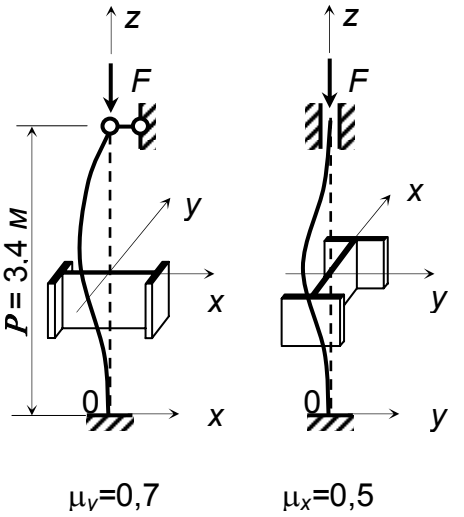


Рис. 3.4. Расчетные схемы стойки

Геометрические характеристики двутавра I № 30 (ГОСТ 8239-89): площадь A = 46,5 см^2; радиусы инерции i_x = 12,3 *см*, i_y = 2,69 *см* (прил. 2).

Тогда гибкости

$$\lambda_x = \frac{\mu_x \ell}{i_x} = \frac{0{,}5 \cdot 340\,см}{12{,}3\,см} = 12{,}35\,;\ \lambda_y = \frac{\mu_y \ell}{i_y} = \frac{0{,}7 \cdot 340\,см}{2{,}69\,см} = 63{,}2\,.$$

Определяем [F] по наибольшей гибкости. Из таблицы коэффициентов φ (прил. 1, таблица) путем линейной интерполяции устанавливаем φ_{cm} при λ_y = = 63,2 (рис. 3.5):

$$\varphi_{cm} = \varphi_n + \frac{\varphi_{n-1} - \varphi_n}{10}(\lambda_n - \lambda_{cm}) = 0{,}81 + \frac{0{,}86 - 0{,}81}{10}(70 - 63{,}2) = 0{,}844,$$

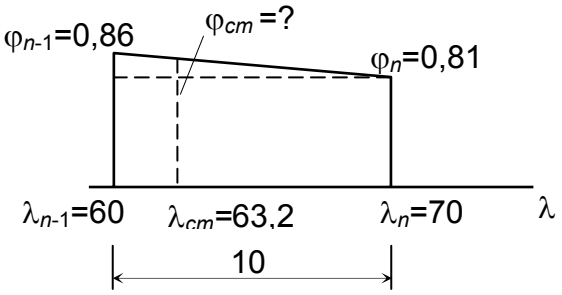


Рис. 3.5. Линейная интерполяция

следовательно,

[F] m 0,844·46,5·16 = 628 *кН*.

Далее определим коэффициент запаса устойчивости для рассмотренной выше стойки. Так как наибольшая гибкость стойки меньше предельной для ее материала, которая для Ст3, как отмечалось ранее, равна 100, критическую силу определяем по формуле Ф.С. Ясинского:

$$F_{кр} = (a - b\lambda)A = (31 - 0{,}114 \cdot 63{,}2) \cdot 46{,}5 = 1106{,}5\ кН.$$

Коэффициент запаса устойчивости

$$K_{уст} = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{1106{,}5}{628} = 1{,}76\,.$$

2. Подбор размеров стойки кольцевого сечения (стальная труба).

Определим геометрические характеристики сечения (рис. 3.6) при $\alpha = \frac{d}{D} = 0{,}76$.

Площадь $A = \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) = \frac{3{,}14}{4}(1 - 0{,}76^2)D^2 = 0{,}332D^2$,

отсюда $D = \sqrt{\frac{A}{0{,}332}} = 1{,}736\sqrt{A}$.

Моменты инерции $J_x = J_y = J = \frac{\pi D^4}{64}(1-\alpha^4) = \frac{3{,}14}{64}(1-0{,}76^4)D^4 = 0{,}0327D^4$.

Радиусы инерции $i_x = i_y = i = \sqrt{\frac{J}{A}} = \frac{D}{4}\sqrt{(1+0{,}76^2)} = 0{,}312D$.

Из формулы $\sigma = \frac{F}{\varphi A} \le [\sigma]$ имеем $A \geqslant \frac{A}{\varphi[\sigma]}$.

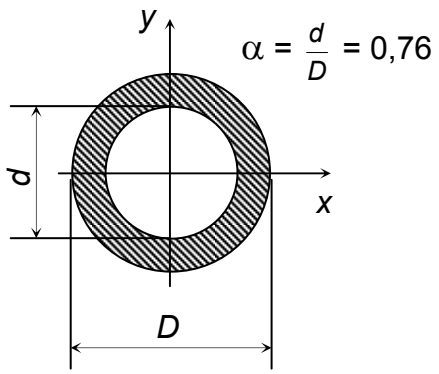


Рис. 3.6. Поперечное сечение трубчатой стойки

Здесь неизвестны коэффициент φ и площадь A, поэтому решаем задачу способом последовательных приближений.

Примем нагрузку $F = [F] = 628$ *кН*. Для начального приближения определим диаметр D_0 при $\varphi = 1$: $A_0 = \frac{628}{1 \cdot 16} = 39{,}25$ *см*^{2} и, следовательно, исходный диаметр трубы $D_0 = 1{,}736\sqrt{A_0} = 1{,}736\sqrt{39{,}25} = 10{,}9$ *см*. Очевидно, что действительный диаметр трубы с учетом гибкости стойки должен быть больше D_0. Попытаемся задать $D_1 = 13$ *см*. Тогда площадь $A_1 = 0{,}332D_1^2 = 0{,}332 \cdot 13^2 = 56{,}11$ *см*^{2}; радиус инерции $i = 0{,}312D_1 = 0{,}312 \cdot 13 = 4{,}06$ *см*; наибольшая гибкость стойки $\lambda_{max} = \frac{0{,}7 \cdot 340}{4{,}06} = 58{,}62$. Путем линейной интерполяции по таблице коэффициентов φ (прил. 1, таблица) получим: $\varphi_{cm} = \varphi_{60} + \frac{\varphi_{50} - \varphi_{60}}{10}(60 - 58{,}62) = 0{,}86 + \frac{0{,}89 - 0{,}86}{10}1{,}38 = 0{,}864$.

Теперь проверим напряжения:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{628}{0{,}864 \cdot 56{,}11} = 12{,}95 \text{ кН/см}^2 < [\sigma] \text{ на } 19\ \%,$$

что, конечно, прочно, но расточительно.

Теперь попытаемся задать диаметр $D_2 = \frac{D_0 + D_1}{2} = \frac{10{,}9 + 13}{2} = 11{,}95$ *см*. Примем $D_2 = 12$ *см*. Проверим это сечение.

Площадь $A_2 = 0{,}332D_2^2 = 0{,}332 \cdot 12^2 = 47{,}81$ *см*^{2}; радиус инерции $i = 0{,}312D_2 = 0{,}312 \cdot 12 = 3{,}744$ *см*; гибкость стойки $\lambda_{max} = \frac{0{,}7 \cdot 340}{3{,}744} = 63{,}57$. По таблице прил. 1 получим $\varphi_{cm} = 0{,}81 + \frac{0{,}86 - 0{,}81}{10}(70 - 63{,}57) = 0{,}842$. Следовательно,

$$\sigma = \frac{F}{\varphi A} = \frac{628}{0{,}842 \cdot 47{,}81} = 15{,}6 \ \textit{кН/см}^2 < [\sigma] \text{ на } 2{,}5\ \%.$$

Принято D = 12 *см*. Так как $d = \alpha D$ = 0,76·12 = 9,12 *см*, примем d = 9 *см*.

Сравним трубчатую стойку по массе с I № 30, для которого масса одного погонного метра составляет 36,5 *кг*, так что двутавровая стойка при длине P = 3,4 *м* имеет массу Q_I = 36,5·3,4 = 124,1 *кг*. Трубчатая стойка при принятых размерах сечения имеет объем

$$V = \frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)\ell = \frac{3{,}14 \cdot 12^2}{4}\left[1-\left(\frac{9}{12}\right)^2\right] \cdot 340 = 16814{,}7 \ \textit{см}^3.$$

При плотности стали γ = 7,85 *г/см*^{3} масса трубы составит

$$Q_{тр} = \gamma V = 7{,}85 \cdot 16814{,}7 = 131995 \ г \approx 132 \ кг.$$

Отсюда видно, что применение трубчатой стойки в сравнении с одиночным двутавром в условиях одинаковой нагрузки и способа крепления их концов привело к некоторому перерасходу металла (около 6 %). Однако при одинаковых условиях крепления концов трубчатой стойки в главных плоскостях, она идеальный равноустойчивый стержень (стойка, колонна).

Подсчитаем коэффициент запаса устойчивости для этой стойки. Так как $\lambda_{ст} < \lambda_{пр}$ d 100, то критическая сила по формуле Ф.С. Ясинского равна

$$F_{кр} = (31 - 0{,}114 \cdot 63{,}57) \cdot 47{,}81 = 1136{,}7 \ кН.$$

Таким образом, коэффициент запаса устойчивости

$$K_{уст} = \frac{F_{кр}}{[F]} = \frac{1136{,}7}{628} = 1{,}81.$$

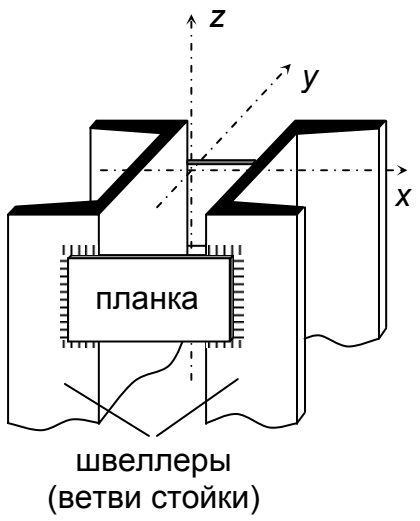


Рис. 3.7. Стойка из двух швеллеров

3. Подбор сечения стойки из двух швеллеров (рис. 3.7), скрепляемых планками.

а) Расчет относительно материальной оси x.

Эта часть расчета предназначена для подбора конкретного швеллера из условия устойчивости относительно оси x (в плоскости $y0z$).

Сначала ориентировочно примем φ = 1 и получим:

$$A_{шв}^{треб} > \frac{F}{\varphi[\sigma]} = \frac{628}{1 \cdot 2 \cdot 16} = 19{,}6 \ \textit{см}^2.$$

По найденной площади сечения $A_{шв}$ из сортамента возьмем швеллер [№ 18, для которого $A_{шв}$ = 20,7 *см*^{2}, z_0 = 1,94 *см*, радиусы инерции i_x = 7,24 *см*, i_y = 2,04 *см*, моменты инерции $J_x^{шв}$ = 1090 *см*^{4}, $J_y^{шв}$ = 86 *см*^{4}.

Теперь проверим принятое сечение.

Гибкость

$$\lambda_x = \frac{\mu_x \ell}{i_x} = \frac{0{,}5 \cdot 340\,см}{7{,}24\,см} = 23{,}48;$$

коэффициент φ (прил. 1)

$$\varphi_x = 0{,}94 + \frac{0{,}96 - 0{,}94}{10}(30 - 23{,}48) = 0{,}953;$$

и напряжение

$$\sigma = \frac{F}{\varphi_x 2A_{шв}} = \frac{628}{0{,}953 \cdot 2 \cdot 20{,}7} = 15{,}92\,кН/см^2.$$

Возникающее напряжение меньше допускаемого на 0,5 %. Итак, принято сечение из 2 [№ 18.

Если окажется, что σ $[\sigma]$ ± 5%, необходимо исследовать другие профили.

б) Расчет относительно свободной (сквозной) оси *y*.

Цель этой части расчета – установление ширины сечения стойки из условия ее равноустойчивости в плоскости *x*0*z* (рис. 3.8). На основе опыта проектирования сжатых стержней (стоек, колонн) на планках принимают момент инерции составного сечения относительно оси *y* в виде соотношения

$$J_y^{ст} \cong 1{,}2 J_x^{ст},$$

где (рис. 3.9) $J_y^{ст} = 2(J_y^{шв} + a^2 A_{шв})$, $J_x^{ст} = 2J_x^{шв}$, *a* – расстояние между осью *y* стойки и собственной центральной осью $y_{шв}$.

Запишем теперь условие равноустойчивости в виде

$$2(J_y^{шв} + a^2 A_{шв}) \cong 1{,}2 \cdot 2J_x^{шв},$$

откуда

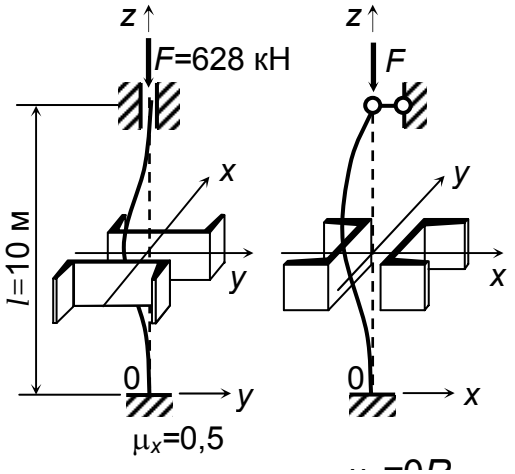


Рис. 3.8. Расчетная с*у*

$$a \geq \sqrt{\frac{1{,}2J_x^{шв} - J_y^{шв}}{A_{шв}}} = \sqrt{1{,}2i_{x\,шв}^2 - i_{y\,шв}^2} = \sqrt{1{,}2 \cdot 7{,}4^2 - 2{,}04^2} = 7{,}84 \ см.$$

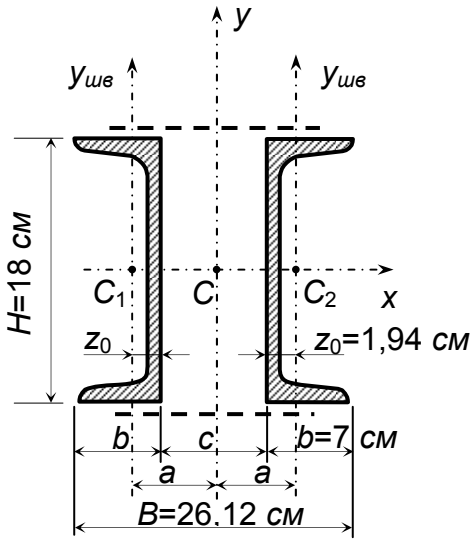


Рис. 3.9. Поперечное сечение стойки

Примем a = 8 *см*.

Проверим напряжения. При принятом a = 8 *см* момент инерции стойки относительно сквозной оси y $J_y^{ст} = 2(86 + 8^2 \cdot 20{,}7) = 2821{,}6$ *см*^{4}, радиус инерции стойки $i_y^{ст} = \sqrt{\frac{J_y^{ст}}{A_{ст}}} = \sqrt{\frac{2821{,}6}{2 \cdot 20{,}7}} = 8{,}26$ *см*, гибкость $\lambda_y^{ст} = \frac{\mu_y \ell}{i_y^{ст}} = \frac{0{,}7 \cdot 340}{8{,}26} = 28{,}8$, коэффициент продольного изгиба φ определяем по таблице в прил. 1 $\varphi_{ст} = 0{,}94 + \frac{0{,}96 - 0{,}94}{10}(30 - 28{,}8) = 0{,}942$.

Напряжения в этом случае составят

$$\sigma = \frac{628}{0{,}942 \cdot 2 \cdot 20{,}7} = 16{,}1 \ кН/см^2 > [\sigma] \text{ на } 0{,}64\ \%.$$

Зазор между ветвями стойки $c = 2(a - z_0) = 2(8 - 1{,}94) = 12{,}12$ *см* > 10 *см*.

Ширина $B = c + 2b = 12{,}12 + 2 \cdot 7 = 26{,}12$ *см*.

Здесь детальное проектирование стойки (расчет планок, их расстановка вдоль оси, конструирование башмака, оголовка и др.) не обсуждается как предмет курса строительных конструкций.

При окончательном оформлении компоновки сечения (рис. 3.9) следует иметь в виду, что зазор c между ветвями должен быть не менее 10 *см* при любом составе сечения (рис. 3.10).

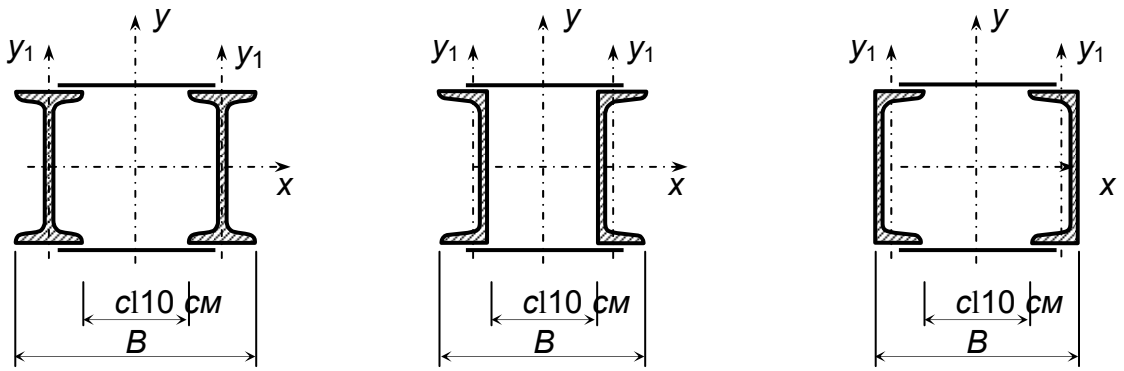


Рис. 3.10. Схемы компоновки сечения из двух прокатных профилей

Если по расчету окажется, что c < 10 *см*, зазор конструктивно увеличивают до 10 *см*, так как необходимо обеспечить доступ внутрь стойки для ее окраски (защита от коррозии).

Сравнивая массу стойки из двух швеллеров (без учета массы планок) обнаруживаем, что масса одиночного двутавра I № 30 Q_I =124,1 *кг*, а масса двухветвевой стойки Q_C=2·16,3·3,4=110,84 кг, что на 10% меньше Q_I.

3.2. Задача 16. Расчеты на удар

Основные понятия

Удар является одним из распространенных явлений, возникающих при эксплуатации всевозможных конструкций, сооружений и машин. Это удары судов, подвижного состава железных и автомобильных дорог, удары артснарядов о броню, забивка свай и шпунтов, дробление каменных материалов и т. д. Удар – это весьма сложный процесс, вызывающий большие затруднения в его изучении и, несмотря на его важность, теория удара еще не завершена. Одним из факторов, осложняющих изучение удара, – его исключительная кратковременность (сотые и тысячные доли секунды), что приводит к возникновению огромных ускорений и, следовательно, огромных сил. Например, используя понятия импульса силы и количества движения, из уравнения Ньютона $F = d(Mv)/dt$ в форме

$$F\cdot\Delta t = \Delta(Mv), \qquad (7.1)$$

где F – сила, Δt – время; M – масса тела; $\Delta(Mv)$ – изменение количества движения за время Δt, v – скорость, получим:

а) при столкновении автомобиля массой M = 2000 *кг* на скорости v = 48 *км/ч* = 13 *м/с* с жесткой стеной при длительности удара Δt = 0,08 *с* ускорение (знак минус, означающий, что сила F направлена в сторону, противоположную направлению скорости v, здесь опускается)

$$a = \frac{1}{\Delta t}\left|(v_0 - v)\right| = \frac{1}{0{,}08}\left|(0-13)\right| = 162{,}5 \ \text{м/сек}^2,$$

так что сила удара

$$F = M\,a = 2 \quad 10^3\,\text{кг} \quad 162{,}5 \ \text{м}/c^2 = 325000\,\text{Н} = 325\,\text{кН} \approx 32{,}5\,m;$$

б) при спрыгивании человека массой M = 70 *кг* с высоты h = 1,3 *м* на жесткий пол при скорости приземления $v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}3} = 5$ *м/с* и времени столкновения Δt = 0,01 *с* имеем силу удара

$$F = M\,a = 70\,кг\ \frac{(0\quad 5\,м/с)}{0{,}01\ \ с} = 35000\ Н \approx 3{,}5\,т!$$

Это опасно для ног и позвоночника. Однако, амортизируя столкновение сгибанием ног в коленях и ступнях, можно ослабить силу удара до 20 раз за счет увеличения длительности Δt удара.

Расчеты на удар производятся по той или иной приближенной теории. В сопротивлении материалов определение напряжений и деформаций при ударе производится на основании закона сохранения энергии при следующих ограничениях и допущениях: закон Гука сохраняет свою силу и максимальные напряжения в соударяемых телах не превосходят предела пропорциональности $\sigma_{пц}$ ($\tau_{пц}$); удар неупругий и после удара тела не отделяются друг от друга (слипаются); ударяющее тело – абсолютно жесткое; масса ударяемой конструкции мала по сравнению массой ударяющего тела; сопротивление движению соударяющихся тел не учитывается; волновые процессы в ударяемом теле не учитываются.

В силу указанных допущений проверка конструкции на удар выполняется по приближенному условию прочности

$$\max \sigma_{дин} = \max \sigma_{стат}\, K_{дин} \le [\sigma_{дин}], \qquad (3.5\ а)$$

$$\max \tau_{дин} = \max \tau_{стат}\, K_{дин} \le [\tau_{дин}], \qquad (3.6\ б)$$

и по приближенному условию жесткости

$$\max f_{дин} = \max f_{стат}\, K_{дин} \le [f], \qquad (3.5\ в)$$

$$\max \varphi_{дин} = \max \varphi_{стат}\, K_{дин} \le [\varphi], \qquad (3.5\ г)$$

где max $\sigma_{дин}$, max $\tau_{дин}$, max $f_{дин}$, max $\varphi_{дин}$ – наибольшие динамические напряжения, линейные f и угловые φ перемещения в ударяемом теле; max $\sigma_{стат}$, max $\tau_{стат}$, max $f_{стат}$, max $\varphi_{стат}$ – то же при статическом нагружении ударяемого тела весом ударяющего тела; $[\sigma_{дин}]$, $[\tau_{дин}]$, $[f]$, $[\varphi]$ – допускаемые напряжения при ударе и допускаемые перемещения; $K_{дин}$ – коэффициент динамичности при ударе, который при продольном и поперечном ударах по конструкции вычисляется по формуле

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{стат}}}, \qquad (3.6)$$

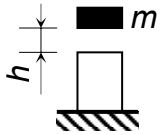
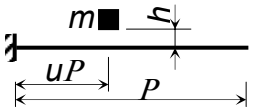
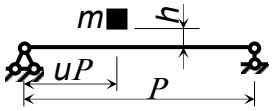
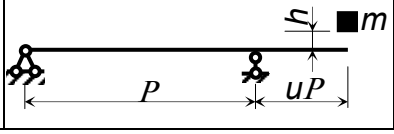
где h – высота падения груза массой m; $\Delta_{стат}$ – статическое перемещение упругой конструкции в месте удара от веса ударяющего тела. Величина $\Delta_{стат}$ может быть с успехом определена по формуле Мора (прил. 4). Если масса ударяемой конструкции не мала по сравнению с массой ударяющего тела, то она может быть учтена при вычислении коэффициента $K_{дин}$ по формуле

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta_{стат}(1 + \alpha\beta)}}, \qquad (3.7)$$

где $\beta = M_{констр}/m$; $M_{констр}$ – масса конструкции; m – масса ударяющего тела; α – коэффициент, определяемый по табл. 3.1.

Таблица 1

Значения коэффициента α при различных случаях удара

Тип удара	Расчетная схема	Коэффициент α	u – доля пролета
Продольный		$\alpha = \frac{1}{3}$	
Поперечный		$\alpha = \frac{105(1-u) + u^2(35-2u)}{140u^2}$	0<um1
		$\alpha = \frac{2(1+2u) - u^2[1+3u(2-u)]}{105u^2(1-u)^2}$	0<u<1
		$\alpha = \frac{8 + u^3[140 + u(231 + 99u)]}{420(1+u)^3 u^2}$	$u > 0$

Условие примера

Груз массой m = 605 *кг* падает с высоты h на стальную двутавровую балку (рис. 3.11). Проверить прочность при $[\sigma_{дин}]$ = 120 *МПа*. Характеристика балки: двутавр I № 36; погонная масса q = 46,8 *кг/м*; J_x =13380 *см*^{4}; W_x = 743 *см*^{3}; модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа* = $2 \cdot 10^4$ *кН/см*^{2}; h = 4 *см*.

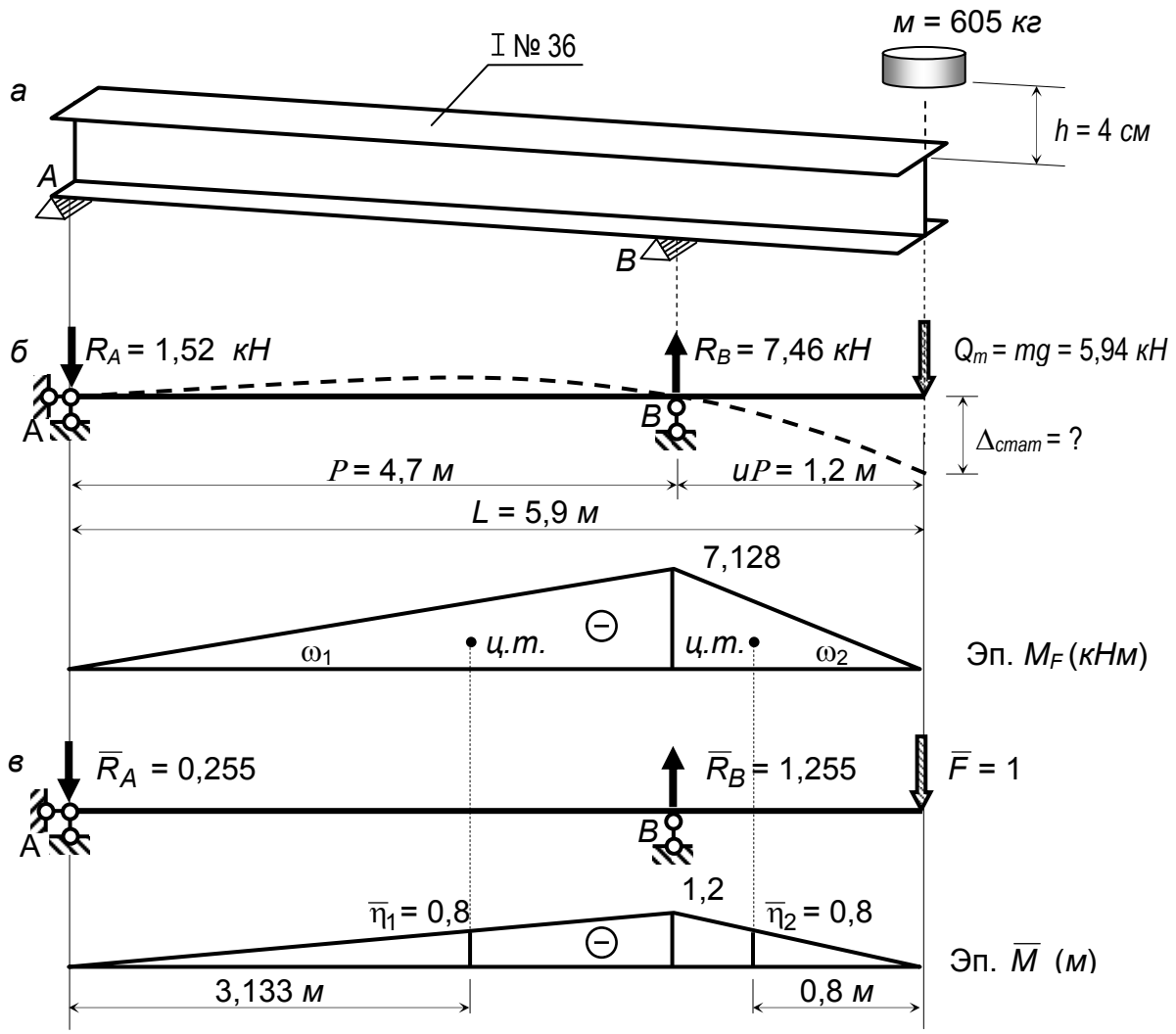


Рис. 3.11. Расчет на удар: *а* – заданная балка; *б* – расчетная схема и ее грузовое состояние; *в* – единичное состояние

Расчет

1. При весе ударника $Q_m = m\,g$ = 605·9,81 = 5940 *Н* = 5,94 *кН,* определяем статический прогиб балки в месте удара по формуле Мора в форме, предложенной А.Н. Верещагиным в 1925 г. (рис. 3.11):

$$\Delta_{стат} = \sum \frac{1}{EJ_x}(\omega_1\overline{\eta}_1 + \omega_2\overline{\eta}_2),$$

где ω_1, ω_2 – площади эпюры M_F; $\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2$ – ординаты эпюры $\overline{M}$, взятые под центрами тяжести ω_1, ω_2; EJ_x – изгибная жесткость балки. Тогда

$$\Delta_{стат} = "M_F \times \overline{M}" = \frac{1}{2\cdot 10^4 \cdot 13380}\left(\frac{1}{2}\cdot 7{,}128\cdot 4{,}7\cdot 0{,}8 + \frac{1}{2}\cdot 7{,}128\cdot 1{,}2\cdot 0{,}8\right)\cdot 10^6 = 0{,}063\,см.$$

Коэффициент

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4}{0{,}063}} = 12{,}31$$

и $\max\sigma_{дин} = \frac{\max M_F}{W_x} \cdot K_{дин} = \frac{7{,}128 \cdot 10^2}{743} \cdot 12{,}31 = 11{,}82\, кН/см^2 < [\sigma]$ на 1,5 %.

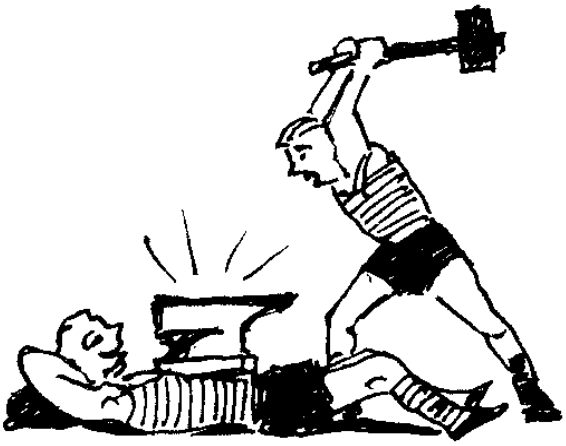
Прочность балки обеспечена.

Теперь проверим балку, учитывая ее массу. Отношение $\beta = M_{бал} / m =$ $= 46{,}8 \cdot 5{,}9 / 605 = 0{,}456$. Коэффициент α (табл. 3.1) подсчитаем так: сначала из соотношения $uP = 1{,}2$ *м* найдем $u = 1{,}2 / 4{,}7 = 0{,}255$, а потом по формуле, приведенной в табл. 3.1, получим $\alpha = 0{,}211$, так что

$$K_{дин} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 4}{0{,}063 \cdot (1 + 0{,}211 \cdot 0{,}456)}} = 11{,}81$$

и $\max\sigma_{дин} = \frac{7{,}128 \cdot 10^2}{743} \cdot 11{,}81 = 11{,}33\, кН/см^2 = 113{,}3\, МПа < [\sigma]$ на 5,6%.

Как видно, чем больше масса балки, тем меньше эффект удара. Например, этим и объясняется эффектный, но безопасный цирковой номер.



3.3. Задача 17. Гармонические колебания упругих систем. Свободные и вынужденные колебания систем с одной степенью свободы

Основные понятия

Колебаниями называются движения, обладающие той или иной степенью повторяемости во времени. По своей физической природе они весьма разнообразны: механические колебания тела, подвешенного на пружине, качания маятников, колебания струн, вибрация зданий и машин, электромагнитные колебания и т. д. Колебания называются *периодическими*, если значения физических величин, изменяющихся в этом процессе, повторяются через равные промежутки времени. Наименьший промежуток времени, за который совершается *одно полное колебание*, называется *периодом T колебания*.

Частотой периодических колебаний ν называется число полных колебаний за единицу времени: $\nu = 1/T$ (c^{-1} или *Гц*). *Циклической* (*круговой*) *частотой* ω периодических колебаний называется число полных колебаний за 2π единиц времени: $\omega = 2\pi\nu = 2\pi / T$. Частным случаем периодических колебаний являются *гармонические колебания*, в которых физическая величина *S* изменяется с течением времени по закону

$$S = A \sin(\omega t + \varphi_0), \tag{3.8}$$

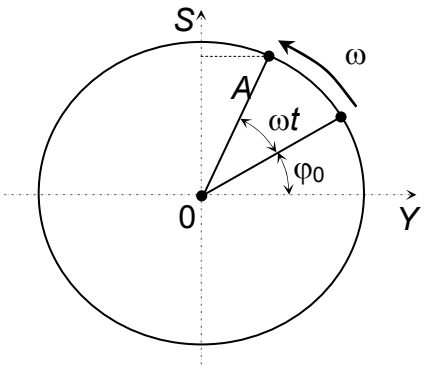


Рис. 3.12. Гармонические колебания

где A, ω, φ_0 – постоянные величины ($A > 0$, $\omega > 0$). Величина *A*, равная наибольшему абсолютному значению *S*, называется *амплитудой* колебания. Выражение ($\omega t + \varphi_0$) определяет значение *S* в момент времени *t* и называется *фазой* колебания. В момент начала отсчета времени ($t = 0$) фаза равна *начальной фазе* φ_0 (рис. 3.12). При $t = 0$ радиус-вектор $0B = A$ составляет с осью *Y* угол φ_0, а за время *t* описывает угол ωt, так что в произвольный момент времени значение *S* определяется выражением (3.8).

Упругую систему можно рассматривать как состоящую из отдельных частей, условно принимаемых за материальные точки. Поэтому *число степеней свободы* упругой системы есть число независимых координат, определяющих положение всех масс системы при ее деформации в любой момент времени. С этой точки зрения упругая система обладает бесконечным числом степеней свободы. Однако если система состоит из упругой части, несущей массивные грузы, масса которых значительно превосходит массу упругой части, то в целях упрощения задач массой упругой

части пренебрегают. В таком случае число степеней свободы упругой системы будет равно числу независимых координат, определяющих положение каждого груза при деформации.

Например, рис. 3.13, *а* – одна степень свободы, так как положение груза определяется только удлинением Δ пружины; рис. 3.13 *б* – положение точечного груза определяется прогибом Δ консоли (одна степень свободы); рис. 3.13, *в* – положение двух точечных грузов на балке определяется прогибами Δ_1 и Δ_2 (две степени свободы); рис. 3.13, *г* – положение точечного груза определяется его горизонтальным и вертикальным смещениями (две степени свободы); рис. 3.13, *д* – перемещения объемного груза: два линейных смещения Δ_1, Δ_2 и угловое φ (три степени свободы). Во всех случаях здесь масса упругой системы во внимание не принималась.

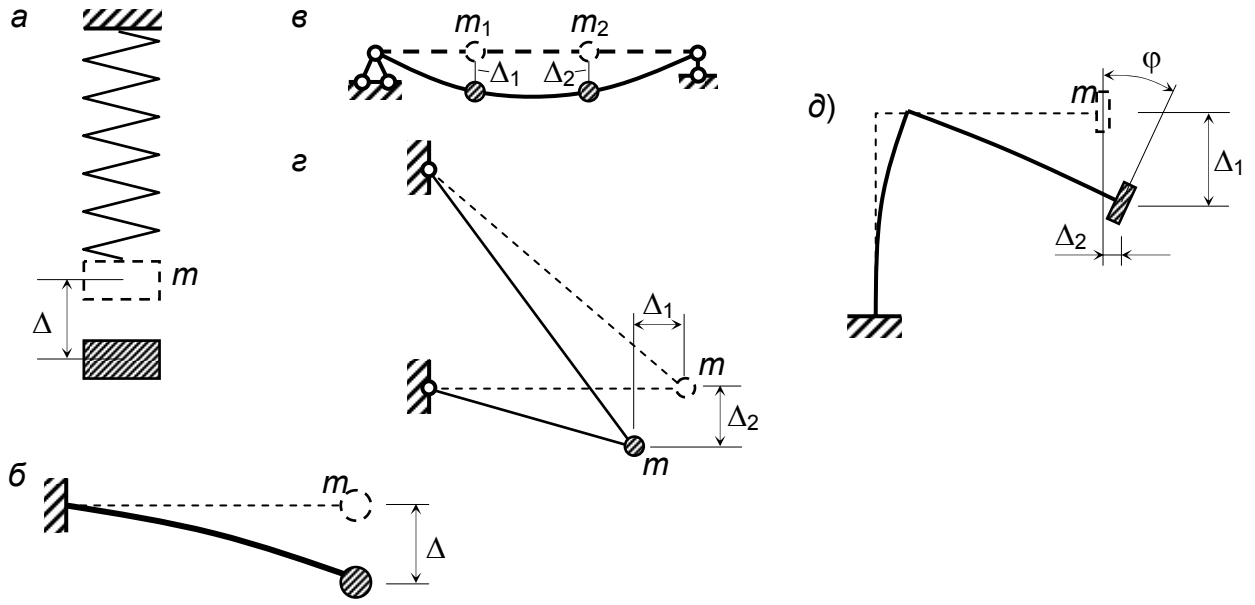


Рис. 3.13. Число степеней свободы грузов невесомой упругой системы: *а*, *б* – одна степень свободы; *в*, *г* – две степени свободы; *д* – три степени свободы

Рассмотрим *колебания систем с одной степенью свободы*. На рис. 3.14, *а* показана упругая консоль, несущая на конце груз массой *M*.

Под действием груза $Q = M\,g$, где g – ускорение свободного падения, балка получит статический прогиб

$$\Delta_{cm} = \frac{Q\ell^3}{3EJ} \tag{3.9}$$

и ее положение упругого равновесия обозначим уровнем 0–0 (рис. 3.14, *б*). Теперь увеличим прогиб конца балки до уровня 1–1 так, что полный прогиб составит $\Delta_{cm} + A$, где A – начальная амплитуда предстоящих колебаний этой сис-

темы с одной степенью свободы. Как видно, упругое равновесие системы нарушено и она стремится восстановить его, т. е. возвратиться в положение 0–0. Освободим груз и, предоставив систему самой себе, выясним, под действием каких сил она будет находиться в момент времени *t* (рис. 3.14, *в*), когда ускоренно пройдет путь $S = A - y$, где y – координата массы *M*, отсчитываемая от состояния статического равновесия.

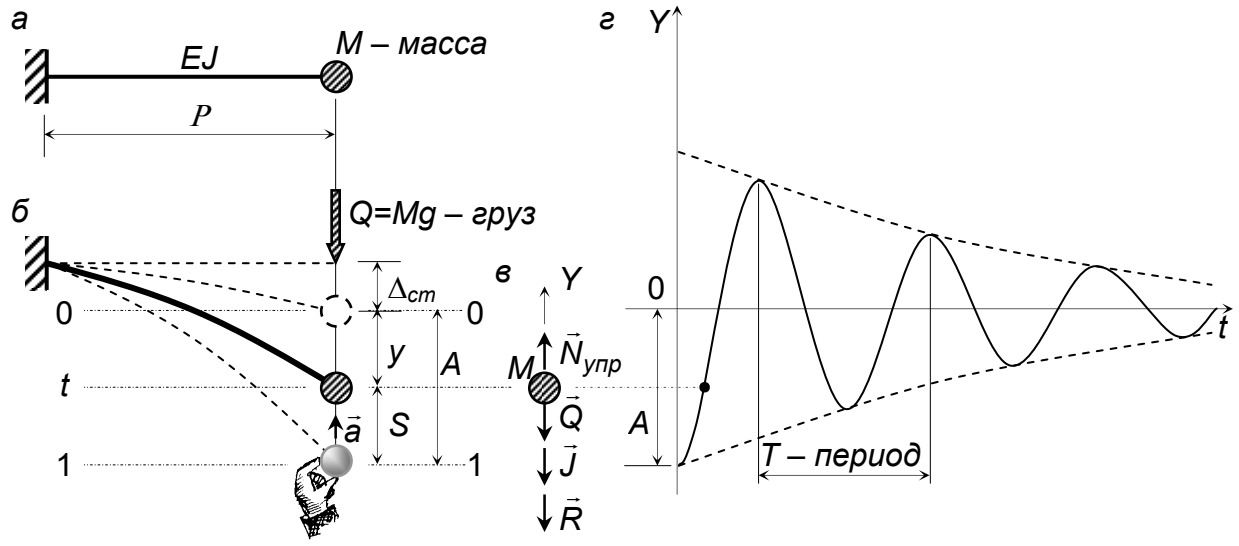


Рис. 3.14. Свободные колебания упругой системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления: *а* – заданная балка; *б* – деформированное состояние балки в различные моменты времени; *в* – силы, действующие на массу в момент времени *t* ; *г* – диаграмма затухающих колебаний массы

Эти силы таковы: восстанавливающая упругая сила $\vec{N}_{упр}^{\uparrow}$ (направлена вверх), сила тяжести (вес груза) $\vec{Q}^{\downarrow}$ (направлена вниз), сила инерции $\vec{J}^{\downarrow}$ (направлена вниз), сила сопротивления $\vec{R}^{\downarrow}$(направлена вниз). Используя принцип Д`Аламбера, запишем условие равновесия как $\sum y = 0$, что дает

$$\vec{N}_{упр} - \vec{Q} - \vec{J} - \vec{R} = 0. \qquad (3.10)$$

Обозначив через *c* линейную жесткость $\frac{3EJ}{\ell^3} \equiv c$, можем записать в момент времени *t*: $\vec{Q} = c\Delta_{ст}$, $\vec{N}_{упр} = c(\Delta_{ст} + y)$, $\vec{J} = M\vec{a}$, $\vec{R} = \alpha\vec{v}$, где $\vec{a}$ – ускорение; $\vec{v}$ – скорость движущейся массы *M*.

Скорость $\vec{v} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(A - y) = -\dot{y}$; ускорение $\vec{a} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = -\ddot{y}$; α – коэффициент пропорциональности в предположении, что сила сопротивле-

ния R (сопротивление воздуха, молекулярного трения частиц системы) приблизительно линейно зависит от скорости v. Подставим указанные величины в (3.10) и получим:

$$c(\Delta_{cm} + y) - c\Delta_{cm} - M(-\ddot{y}) - \alpha(-\dot{y}) = 0$$

или

$$M\ddot{y} + \alpha\dot{y} + cy = 0. \qquad (3.11)$$

Разделив почленно последнее уравнение на M, получим линейное однородное дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы с учетом сил сопротивления, которые с течением времени затухают:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = 0, \qquad (3.12)$$

где $n = \alpha / 2M$ – коэффициент затухания; $\omega^2 = c / M$ – квадрат круговой частоты свободных колебаний. Решением уравнения (3.12), т. е. его интегралом, является уравнение свободных колебаний в форме (подробности решения здесь не приводятся)

$$y_0 = Ae^{-nt}\left[\cos\left(t\sqrt{\omega^2 - n^2}\right) + \frac{n}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}\sin\left(t\sqrt{\omega^2 - n^2}\right)\right], \qquad (3.13)$$

где $\omega > n$, e – основание натурального логарифма. При $\omega < n$ решение будет иным и здесь не рассматривается. График уравнения (3.13) приведен на рис. 3.14, *г*, где при возрастании времени t амплитуда y_0 быстро стремится к нулю (из-за наличия экспоненциального множителя e^{-nt}). Итак, свободные колебания упругой системы быстро затухают, и система вновь занимает положение 0–0 статического равновесия. Период этих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}. \qquad (8.7)$$

Рассмотрим *собственные колебания упругой системы с одной степенью свободы*. Важное значение при расчетах сооружений и машин имеют так называемые собственные колебания системы. Это идеальные свободные колебания без учета сил сопротивления, т. е. при α (или n) равном нулю. Уравнение амплитуд собственных колебаний при $n = 0$ получаем из уравнения (3.13): $y = A \cos \omega t$, график которого представлен на рис. 3.15. Это гармонические колебания с периодом $T = 2\pi/\omega$ и постоянной амплитудой A. Круговая частота ω собственных колебаний вычисляется по формулам:

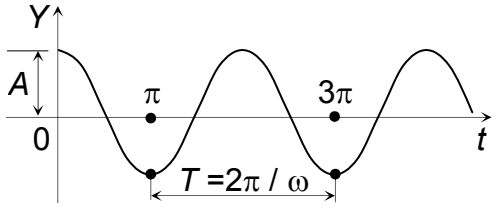


Рис. 3.15. График гармонических колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{M}} = \sqrt{\frac{c}{Q/g}} = \sqrt{\frac{cg}{c\Delta_{cm}}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}.$$

Итак, собственные колебания характеризуются круговой частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}}$ и периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$, где g = 9,81 *м/с*^{2}, Δ_{cm} – статическая деформация упругой системы в точке крепления массы *M*. Эти значения по сути дела можно рассматривать как *динамический паспорт упругой системы*. Техническая частота этих колебаний $\nu = 1 / T$ [*Гц*]; число колебаний в минуту подсчитывается так:

$$\tilde{n} = \frac{60}{T} = \frac{60\omega}{2\pi} = \frac{30}{\pi}\sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}} \approx \frac{300}{\sqrt{\Delta_{cm}}},$$

где Δ_{cm} принимают в сантиметрах.

Вынужденные колебания упругой системы при вибрационной нагрузке. Под влиянием переменно действующих на систему внешних сил она совершает вынужденные колебания, которые возникают от периодических воздействий неуравновешенных вращающихся масс, от периодических толчков или ударов и т. п. В простейших случаях возмущающая сила изменяется по закону $F(t) = F_{\max}\cos\Theta t$ (это вибрационная нагрузка), где $F_{\max}$ – наибольшая по абсолютному значению величина $F(t)$ за время одного цикла; Θ – круговая частота вынуждающей силы; t – время. Природу возникновения вибрационного воздействия можно иллюстрировать, например, рис. 3.16, где в плоскости чертежа равномерно вращают массу *m*. Возвращаясь к рис. 3.14, *в*, к указанным там силам добавим вынуждающую силу *F*(*t*) так, что уравнение динамического равновесия приобретет вид:

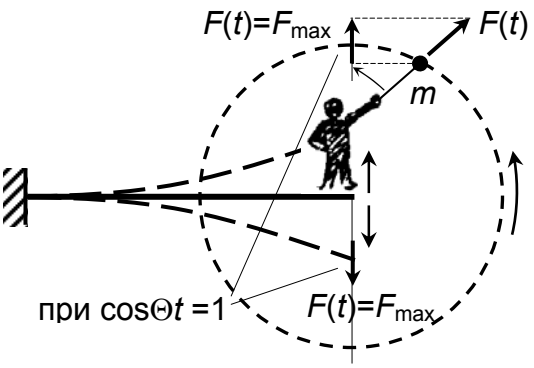


Рис. 34. Поперечная вибрация

$$\vec{N}_{упр} - \vec{Q} - \vec{J} - \vec{R} - \vec{F}(t) = 0, \qquad (3.15)$$

где слагаемое *F*(*t*) не содержит переменной *y*. После тех же преобразований, что выполнены ранее, получим уравнение:

$$\ddot{y} + 2n\dot{y} + \omega^2 y = F_{\max}\frac{g}{Q}\cos\Theta t\,. \qquad (3.16)$$

Его общее решение состоит из решения однородного уравнения (3.13) и частного решения с правой частью $F_{\max}\frac{g}{Q}\cos\Theta t$, т. е. $y = y_0 + y_{част}$.

Так как y_0 быстро затухает, то по истечении короткого времени вынуждающая сила $F(t)$ “подчинит” себе упругую систему, которая будет совершать вынужденные колебания с частотой Θ, уравнение которых приобретет вид [5]

$$y_{вын} = \frac{f(\omega^2 - \Theta^2)}{(\omega^2 - \Theta^2)^2 + 4n^2\Theta^2}\cos\Theta t + \frac{2fn\Theta}{(\omega^2 - \Theta^2)^2 + 4n^2\Theta^2}\sin\Theta t\,, \qquad (3.17)$$

где $f = F_{\max}\frac{g}{Q}$. Анализ последнего уравнения приводит к следующим результатам. Наибольшая амплитуда $y_{\max} = A_{вын}$ вынужденных колебаний определяется выражением

$$A_{вын} = \frac{f}{\sqrt{(\omega^2 - \Theta^2)^2 + 4n^2\Theta^2}}\,. \qquad (3.18)$$

Амплитуда вынужденных колебаний не зависит ни от начальных условий, ни от времени. Поэтому вынужденные колебания с течением времени не затухают. Деформации и, следовательно, напряжения в упругих системах *зависят от возмущающей силы и главным образом от частоты* Θ.

Рассмотрим *явление резонанса*. Для дальнейшего анализа формулы (3.18) преобразуем ее следующим образом: выше показано, что $\omega^2 = \frac{g}{\Delta_{ст}}$, $Q = c\Delta_{ст}$, так что $f = F_{\max}\frac{g}{Q} = F_{\max}\frac{g}{c\Delta_{ст}} = F_{\max}\frac{\omega}{c}$, а

$$\sqrt{(\omega^2 - \Theta^2)^2 + 4n^2\Theta^2} = \omega^2\sqrt{\left(1 - \frac{\Theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4n^2\frac{\Theta^2}{\omega^4}}\,.$$

Подставив эти выражения в (3.18), получим:

$$A_{вын} = \frac{F_{\max}}{c}\mu\,,$$

где $\mu = \dfrac{1}{\sqrt{\left(1-\dfrac{\Theta^2}{\omega^2}\right)^2 + 4n^2\dfrac{\Theta^2}{\omega^4}}}$ – *коэффициент динамичности* или *коэффициент нарастания колебаний*. Отношение $\dfrac{\Theta}{\omega}$ называется *коэффициентом расстройки*, а отношение $\dfrac{n}{\omega}$ *коэффициентом вязкости* (*трения*). Заметим, что отношение $\dfrac{F_{\max}}{c}$ есть статическая деформация от воздействия $F_{\max}$, т. е. $\Delta_{cm(F_{\max})}$. Динамическая деформация будет равна сумме статической деформации $\Delta_{cm(Q)}$ от веса Q и амплитуды вынужденных колебаний:

$$\Delta_{дин} = \Delta_{cm(Q)} + A_{вын} = \Delta_{cm(Q)} + \Delta_{cm(F_{\max})}\mu = \Delta_{cm(Q)}\left(1 + \frac{\Delta_{cm(F_{\max})}}{\Delta_{cm(Q)}}\mu\right).$$

Обозначив $\left(1 + \dfrac{\Delta_{cm(F_{\max})}}{\Delta_{cm(Q)}}\mu\right) = K_{дин}$, получим $\Delta_{дин} = \Delta_{cm(Q)} K_{дин}$, где $K_{дин}$ – *динамический коэффициент* при вынужденных колебаниях линейно деформируемой упругой системы с одной степенью свободы, величина которого главным образом зависит от μ. Обычно величина $\dfrac{n^2}{\omega^2}$ мала и ею можно пренебречь ($n = 0$), так что μ при этом запишется в виде $\mu = \dfrac{1}{1-\left(\dfrac{\Theta}{\omega}\right)^2}$.

По физическому смыслу μ берут по абсолютному значению.

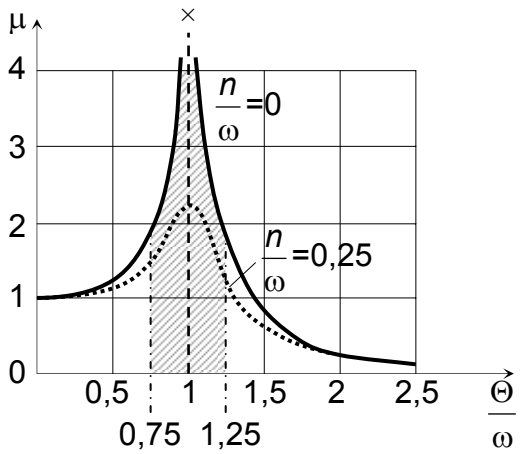


Рис. 3.17. Явление резонанса

График μ в зависимости от отношения частот вынужденных и собственных колебаний дан на рис. 3.17, где заштрихована опасная зона резонансных отношений $\dfrac{\Theta}{\omega}$, которые должны удовлетворять требованию

$$0{,}75 \text{ l } \frac{\Theta}{\omega} \text{ l } 1{,}25. \qquad (8.12)$$

При Θ L ω, как видно, μ L $\times$, т. е. амплитуды вынужденных колебаний силь-

но (что *недопустимо*) возрастают. Это и есть *явление резонанса* – причина многих катастроф сооружений и машин, или расстройств их, исключающих нормальную эксплуатацию.

Порядок динамических расчетов при колебаниях рассмотрим на примерах.

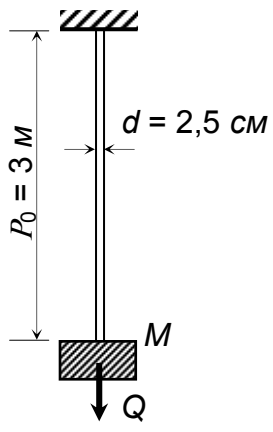


Рис. 3.18. Схема стержня

Условие примера 1

Медный стержень круглого поперечного сечения диаметром d = 2,5 *см* и длиной P_0 = 3 *м* (рис. 3.18) удерживает на нижнем торце груз массой M = 3920 *кг*. Пренебрегая массой стержня, определить частоту и период собственных колебаний этой упругой системы.

Расчет

1. Эта система (см. рис. 3.13, *а*) обладает одной степенью свободы.
2. Круговая частота ω собственных колебаний определится по формуле

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{cm}}},$$

где g = 9,81 *м*/*с*^{2} = 981 *см*/*с*^{2} – ускорение свободного падения; Δ_{cm} – удлинение стержня от веса Q груза, равного

$$Q = M\,g = 3920 \cdot 9{,}81 = 38455\ H = 38{,}455\ кН.$$

Это продольное удлинение в данном случае удобно вычислить по формуле Гука как

$$\Delta_{cm} = \Delta\ell = \frac{Q\ell_0}{EA_0},$$

где для меди модуль Юнга $E_м$ = 1,1·10^5 *МПа* = 1,1·10^4 *кН*/*см*^{2}, а площадь поперечного сечения

$$A_0 = \frac{\pi d^2}{4} = 0{,}785 d^2 = 0{,}785 \cdot 2{,}5^2 = 4{,}9\ см^2.$$

Таким образом,

$$\Delta_{cm} = \frac{38{,}455 \cdot 3 \cdot 10^2\ кНсм}{1{,}1 \cdot 10^4\ кН/см^2 \cdot 4{,}9\,см^2} = 0{,}214\ см.$$

Тогда круговая частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{981\ см / с^2}{0{,}214\ см}} = 67{,}706\ с^{-1},$$

период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{67{,}706} = 0{,}0928\ с,$$

техническая частота

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}0928} = 10{,}776\ Гц,$$

минутная частота

$$\tilde{n} \cong \frac{300}{\sqrt{\Delta_{ст}}} = \frac{300}{\sqrt{0{,}214}} = 647{,}95\ кол / мин.$$

3. Если при прочих равных условиях взять стержень алюминиевый ($E_{ал} = 0{,}7 \cdot 10^5$ *МПа* $= 0{,}7 \cdot 10^4$ *кН/см*^{2}), то

$$\Delta_{ст} = \frac{38{,}455 \cdot 3 \cdot 10^2\ кНсм}{0{,}7 \cdot 10^4\ кН / см^2 \cdot 4{,}9\, см^2} = 0{,}336\ см$$

и круговая частота

$$\omega = \sqrt{\frac{981}{0{,}336}} = 54{,}03\, с^{-1},$$

а период колебаний

$$T = \frac{2 \cdot 3{,}143}{54{,}03} = 0{,}1163\ с.$$

Как видно, частота ω и период T зависят не только от расчетной схемы и геометрических характеристик сечений элементов, но и от упругих свойств материала конструкции (от модуля Юнга E).

4. Оценим, насколько оправдано пренебрежение массой стержня при вычислении ω и T. Плотность меди $\rho_м = 8960$ *кг/м*^{3} $= 8{,}96$ *г/см*^{3}, так что масса рассмотренного выше стержня ($V_0 = P_0 A_0$ – объем) $m_м = \rho_м V_0 =$ $= 8{,}96 \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 4{,}9 \cdot 10^{-3} = 13{,}17$ *кг* и это составляет 1/297 часть от массы груза.

Для алюминиевого стержня, при плотности $\rho_{ал}$ = 2,7 *г/см*^{3}, это составляет 1/987 часть от массы груза *M*. В данном случае пренебрежение массой стержня – оправдано.

Условие примера 2

На двухопорной балке (двутавр I№ 36; погонная масса *q* = 46,8 *кг/м*; J_x = 13380 *см*^{4}; W_x = 743 *см*^{3}; модуль Юнга *E* = 2·10^5 *МПа* = 2·10^4 *кН/см*^{2}) посередине пролета установлен электромотор массой *M* = 3568 *кг* (рис. 3.19). В связи с несовпадением оси вращения ротора с его центральной осью образовался эксцентриситет *e* = 0,25 *см*, что создает из-за динамической неуравновешенности последнего вибрационную нагрузку на балку. Масса неуравновешенной части ротора *m* = 698,6 *кг*, а число оборотов его *n* = 550 *об/мин*. Требуется проверить эту систему на резонанс, а также прочность балки при [σ] = 120 *МПа* (при переменных напряжениях, возникающих в элементах кон-

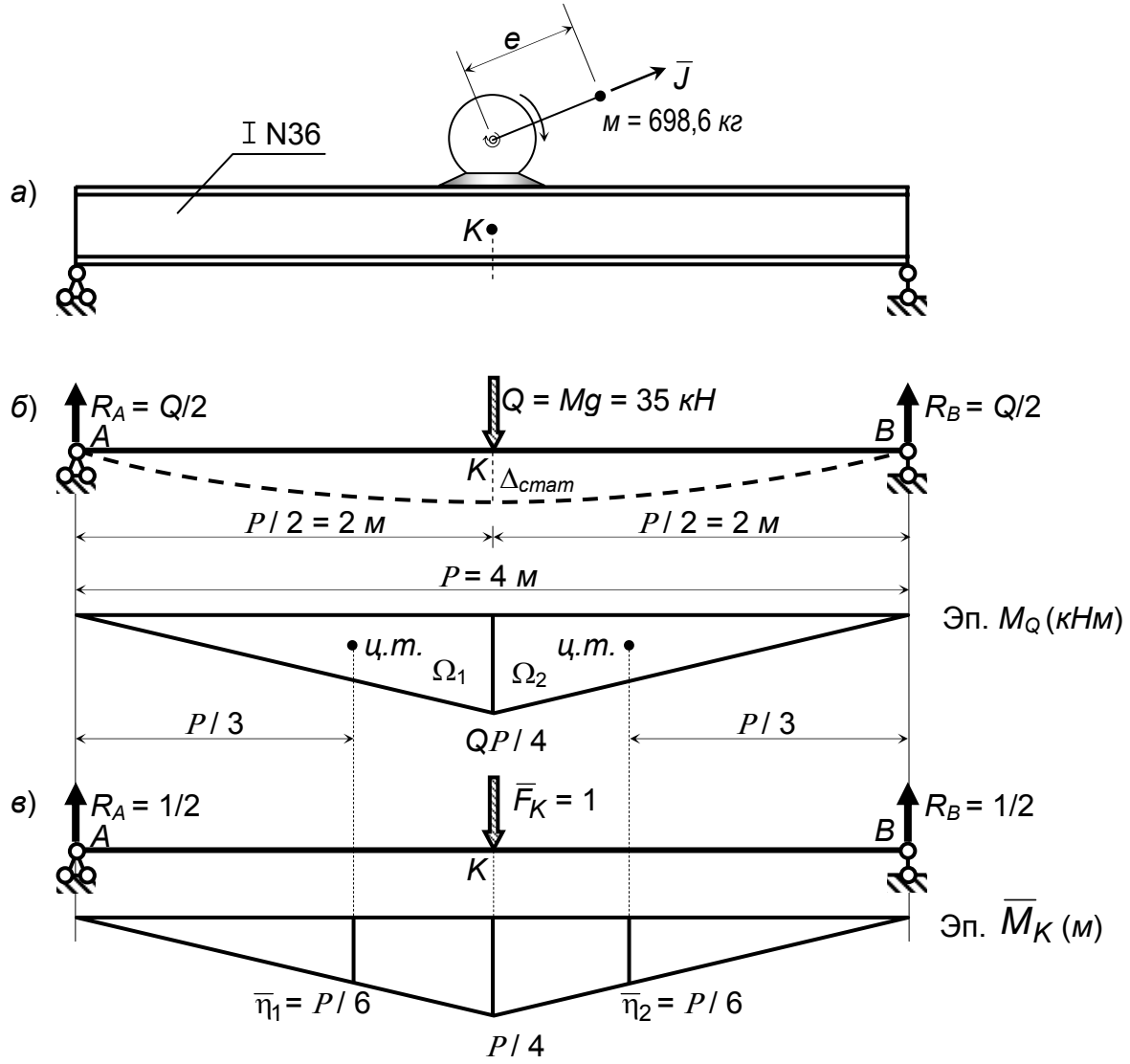


Рис. 3.19. К расчету балки на колебания: *а* – заданная балка; *б* – расчетная схема и ее грузовое состояние; *в* – единичное состояние

струкции при колебаниях, допускаемые напряжения понижают).

Расчет

1. Пренебрегая массой балки (считая ее невесомой), устанавливаем, что такая система обладает одной степенью свободы, ибо положение массы *M* при вертикальных колебаниях балки определяется одной координатой – прогибом ее в точке крепления электромотора (т. е. посередине пролета).

2. Проверка на резонанс. Для этого надо вычислить статический прогиб балки Δ_{cm} в точке *K* (рис. 3.19). Используем метод Мора в форме Верещагина. Сначала строим эпюру изгибающих моментов грузового состояния от действия веса *Q* (рис. 3.19, *б*), потом эпюру единичного состояния (рис. 3.19, *в*). По участкам вычисляем площади Ω_i грузовой эпюры и определяем положение центров их тяжести.

Под центрами тяжести площадей Ω_i в эпюре $\overline{M}_K$ определяем ординаты $\overline{\eta}_i$. Тогда $\Delta_{cm} = "M_Q \times \overline{M}_K" = \frac{1}{EJ_x}\left(\Omega_1\overline{\eta}_1 + \Omega_2\overline{\eta}_2\right)$, где в силу симметрии имеем $\Omega_1 = \Omega_2 = \frac{1}{2}\frac{Q\ell}{4}\frac{\ell}{2} = \frac{Q\ell^2}{16}$, $\overline{\eta}_1 = \overline{\eta}_2 = \frac{\ell}{6}$, так что

$$\Delta_{ст} = \frac{1}{EJ_x}2\frac{Q\ell^2}{16}\frac{\ell}{6} = \frac{Q\ell^3}{48EJ_x}.$$

Изгибная жесткость стальной балки в данном случае $EJ_x = 2\cdot10^4$ *кН/см*^{2} $\cdot$ $\cdot 13380$ *см*^{4} $= 2{,}776\cdot10^8$ *кНсм*^{2} и, следовательно, при $Q = M\,g = 3568$ *кг* $\cdot$ $\cdot$ 9,81 *м/с*^{2} = 35000 *Н* = 35 *кН*,

$$\Delta_{cm} = \frac{35\ кН\cdot(4\cdot10^2)^3\ см^3}{48\cdot2{,}776\cdot10^8\ кНсм^2} = 0{,}168\ см.$$

Круговая частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{0{,}168}} = 76{,}4\ \ с^{-1}.$$

Частота вынужденных колебаний (при *n* = 560 *об/мин*)

$$\Theta = \frac{\pi n}{30} = \frac{3{,}142\ \ 560}{30} = 58{,}65\ \ с^{-1}.$$

Отношение частот вынужденных и собственных колебаний

$$\frac{\Theta}{\omega} = \frac{58{,}65}{76{,}4} = 0{,}768 > 0{,}75.$$

Это означает, что система вошла в запретную зону резонансов. Как быть? Конструктор может заменить материал балки (что проблематично), изменить место крепления груза на балке (что чаще всего не допускается), изменить жесткость балки, т. е. принять балку иного сечения. Последнее чаще всего и делается.

Изменим сечение, приняв двутавр I № 40 (J_x = 19062 *см*^{4}; W_x = 953 *см*^{3}).

Тогда

$$\Delta_{ст} = \frac{35\ кН \cdot (4 \cdot 10^2)^3}{48 \cdot 2 \cdot 10^4 \cdot 19062} = 0{,}122\ см,$$

а круговая частота собственных колебаний системы

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{ст}}} = \sqrt{\frac{981}{0{,}122}} = 89{,}67\ \ сек^{-1}\ \text{и}$$

отношение частот вынужденных и собственных колебаний

$$\frac{\Theta}{\omega} = \frac{58{,}65}{89{,}67} = 0{,}654 < 0{,}75.$$

Из зоны резонансов вышли.

3. Проверка прочности балки:

$$\max \sigma_{дин} = \max \sigma_{стат}\, K_{дин}\, \mathrm{m}\, [\sigma_{дин}],$$

где $K_{дин} = 1 + \frac{\Delta_{ст(J)}}{\Delta_{ст(Q)}}\mu = 1 + \frac{\bar{J}}{Q}\mu$ (отношение статических прогибов здесь вполне можно заменить отношением сил, их вызвавших, ибо в линейно деформируемых системах перемещения Δ пропорциональны силам). Центробежная сила инерции $\bar{J}$ равномерно вращающейся массы m = 698,6 *кг* равна $\bar{J} = m\Theta^2 e = 698{,}6 \cdot 58{,}65^2 \cdot 0{,}25 \cdot 10^{-2} = 6008 H \cong 6 кН$. В свою очередь коэффициент нарастания колебаний

$$|\mu| = \frac{1}{1 - \left(\frac{\Theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - (0{,}654)^2} = \frac{1}{0{,}572} = 1{,}748,$$

так что

$$K_{дин} = 1 + \frac{6}{35} \cdot 1{,}748 \approx 1{,}3.$$

Тогда

$$\max \sigma_{дин} = \frac{\max M_x}{W_x} \cdot K_{дин} = \frac{Q\ell}{4W_x} \cdot K_{дин} = \frac{35 \cdot 4 \cdot 10^2}{4 \cdot 953} \cdot 1{,}3 = 4{,}77 \frac{кН}{см^2} = 47{,}7 МПа < [\sigma].$$

Прочность балки обеспечена.

3.4. Задача 18. Вычисление коэффициента запаса усталостной прочности цилиндрической пружины при циклическом нагружении

Основные понятия

1. *Краткие сведения о витых цилиндрических пружинах малого шага. Витыми пружинами* малого шага *h* считаются те, у которых угол α наклона витков не превышает 8÷10° (α m 10°). *Шагом h* называется расстояние между осями смежных (соседних) витков (рис. 3.20). Витые пружины изготовляются из стальной или фосфористой бронзы проволок круглого (некруглого) сечения. Материал, из которого изготовляют пружины, как правило, высокопрочный с допускаемыми напряжениями на срез при статических нагрузках до [τ]=(50÷70) *кН/см*^{2} (500÷700 *МПа*). В случаях непрерывной работы пружин при циклических нагрузках допускаемые напряжения [τ] уменьшаются на 60 %.

Основными геометрическими характеристиками рассматриваемых пружин являются: угол α наклона витков, их шаг *h*, диаметры внутренний $D_{вн}$, наружный $D_{нар}$ и средний D_0 (последний определяется по формуле $D_0 = \frac{D_{вн} + D_{нар}}{2}$), а также размеры поперечного сечения витков (если пружина изготовлена из круглой проволоки – задается диаметр *d* сечения). Важной характеристикой является так называемый индекс пружины $C_п = D_0 / d$ (рис. 3.20, *а*, *б*).

Используя метод сечений (РОЗУ), определяют в поперечных сечениях проволоки главный вектор $R_0 = F$ и главный момент $M_0 = \frac{FD_0}{2}$ внутренних сил, приведенных к центру *C* сечения витка (рис. 3.20, *б*). Ввиду наклона оси витков на угол α, поперечное сечение также наклонено к оси пружины на угол α, и поэтому, разлагая R_0 и M_0 по главным центральным осям инерции сечения (оси $x_C y_C z_C$) получаем составляющие (компоненты) внутренних сил (усилий): нормальную $N_z = R_0 \sin\alpha = \sin\alpha$, поперечную $Q_y = R_0 \cos\alpha = F \cos\alpha$, изгибающий момент $M_y = M_0 \sin\alpha = = \frac{FD_0}{2} \sin\alpha$, крутящий момент $M_z = M_{кр} = M_0 \cos\alpha = \frac{FD_0}{2} \cos\alpha$.

В практических расчетах при малости угла α условно принимают $\sin\alpha \approx 0$, $\cos\alpha \approx 1$ (например, sin 10° = 0,1736, а cos 10° = 0,9848). Поэтому в целях упрощения расчетов полагают $N_z = M_y = 0$ и учитывают только $M_{кр}$ и Q_y (рис. 3.20, *в*).

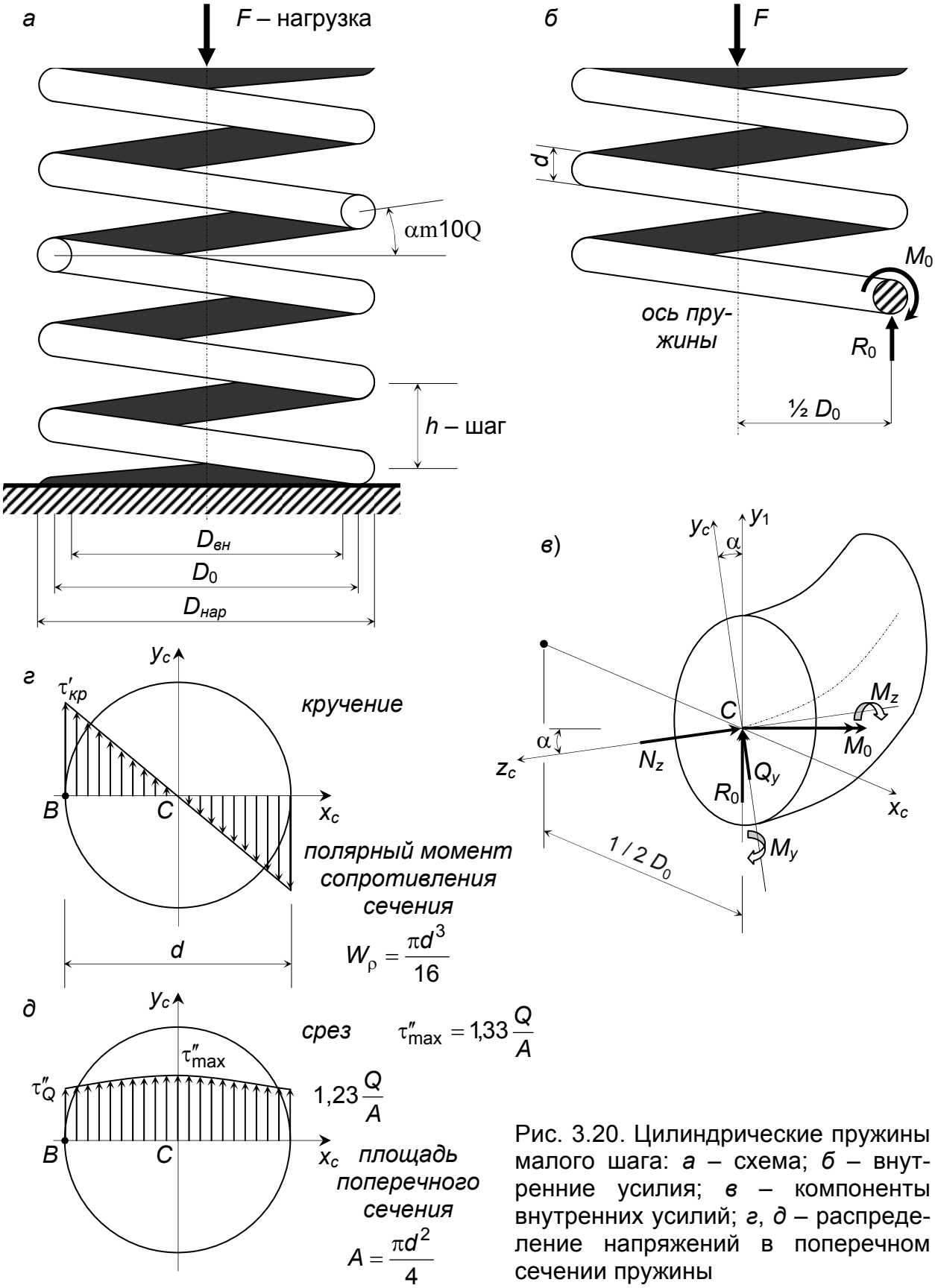


Рис. 3.20. Цилиндрические пружины малого шага: *а* – схема; *б* – внутренние усилия; *в* – компоненты внутренних усилий; *г*, *д* – распределение напряжений в поперечном сечении пружины

Эпюры касательных напряжений τ в поперечном сечении проволоки показаны на рис. 3.20, *г*, *д*, откуда видно, что опасной точкой сечения является точка *B* на внутреннем волокне витков, и полное напряжение в которой складывается из напряжения $\max\tau'_{кр}$ при кручении и напряжения τ''_Q от среза силой Q_y, т. е. $\max\tau = \max\tau'_{кр} + \tau''_Q$, где в свою очередь $\max\tau'_{кр} = \dfrac{M_{кр}}{W_\rho} = \dfrac{8FD_0}{\pi d^3}$, $\tau''_Q = 1{,}23\dfrac{Q}{A} = 1{,}23\dfrac{4F}{\pi d^2}$.

Таким образом, полное касательное напряжение в точке *B*:

$$\max\tau_B = \frac{8FD_0}{\pi d^3} + 1{,}23\frac{4F}{\pi d^2} = \frac{8FD_0}{\pi d^3}\left(1 + \frac{0{,}615}{C_п}\right) = k\frac{8FD_0}{\pi d^3},$$

где $C_п = D_0 / d$, а $\left(1 + \dfrac{0{,}615}{C_п}\right) = k$.

Однако по уточненным расчетам где приняты во внимание кривизна оси витков пружины и другие факторы, последнее выражение для коэффициента *k* принимается в виде $k_1 = \left(\dfrac{C_п + 0{,}25}{C_п - 1} + \dfrac{0{,}615}{C_п}\right)$, так что имеем

$$\max\tau_B = k_1\frac{8FD_0}{\pi d^3} = \frac{8FD_0}{\pi d^3}\left(\frac{C_п + 0{,}25}{C_п - 1} + \frac{0{,}615}{C_п}\right). \qquad (9.1)$$

Формулой (3.20) мы ниже и воспользуемся для определения запаса прочности клапанной пружины.

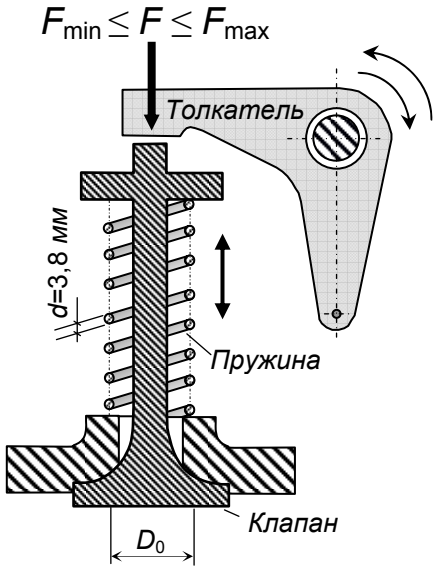


Рис. 3.21. Клапанный механизм в разрезе (схема)

Условие примера

Пусть клапанная пружина работает в режиме циклического нагружения силой *F* и имеет следующие размеры (рис. 3.21): $D_{вн}$ = 38,2 *мм*, $D_{нар}$ = 45,8 *мм*, *d* = 3,8 *мм.*

Сила *F*, сжимающая пружину при полном открытии клапана, F_{max} = 220 *Н* = 0,22 *кН*, а при закрытии клапана имеет величину F_{min} = 70 *Н* = 0,07 *кН*. Пружина выполнена из хромованадиевой стали со следующими механическими характеристиками: пределом текучести $\tau_т$ = 920 *МПа* = 92 *кН/см*^{2}; пределом выносливости при симметричном цикле τ_{-1} = 480 *МПа* = 48 *кН/см*^{2}; пределом выносливости при отнулевом (пульсирующем) цикле τ_0 = 800 *МПа* = 80 *кН/см*^{2}.

Коэффициенты, учитывающие влияние различных факторов на усталостную прочность пружины, имеют значения: эффективный коэффициент концентрации касательных напряжений $K_\tau = 1{,}07$, коэффициент влияния качества обработки поверхности проволоки $\beta = 0{,}83$ и коэффициент учета масштабного фактора $\varepsilon_\tau = 0{,}97$ (эти коэффициенты могут иметь и иные обозначения, например, $K_\tau \Rightarrow K_{эфф}$, $\beta \Rightarrow K_{F\tau}$, $\varepsilon_\tau \Rightarrow K_{d\tau}$).

Требуется определить коэффициент n_R запаса усталостной прочности данной детали (пружины) механизма и коэффициент запаса прочности $n_т$ по пределу текучести. Сравнить их.

Расчет

1. Определение среднего диаметра D_0, индекса $C_п$ пружины и коэффициента k_1:

$$D_0 = \frac{D_{нар} + D_{вн}}{2} = \frac{45{,}8 + 38{,}2}{2} = 42\ мм = 4{,}2\ см;$$

$$C_п = \frac{D_0}{d} = \frac{4{,}2}{0{,}38} = 11{,}05;$$

$$k_1 = \frac{C_п + 0{,}25}{C_п - 1} + \frac{0{,}615}{C_п} = \frac{11{,}05 + 0{,}25}{11{,}05 - 1} + \frac{0{,}615}{11{,}05} = 1{,}18.$$

2. Определение основных характеристик цикла напряжений в опасной точке B:

• максимальное напряжение цикла

$$\tau_{max} = k_1 \frac{8F_{max}D_0}{\pi d^3} = 1{,}18 \frac{8 \cdot 0{,}22 \cdot 4{,}2}{3{,}14 \cdot 0{,}38^3} = 50{,}71\ \frac{кН}{см^2} = 507{,}1\ МПа;$$

• минимальное напряжение цикла

$$\tau_{min} = k_1 \frac{8F_{min}D_0}{\pi d^3} = 1{,}18 \frac{8 \cdot 0{,}07 \cdot 4{,}2}{3{,}14 \cdot 0{,}38^3} = 16{,}14\ \frac{кН}{см^2} = 161{,}4\ МПа;$$

• среднее напряжение цикла

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = \frac{507{,}1 + 161{,}4}{2} = 334{,}2\ МПа;$$

амплитудное напряжение цикла

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = \frac{507{,}1 - 161{,}4}{2} = 172{,}8\ МПа;$$

коэффициент асимметрии цикла

$$R = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = \frac{161{,}4}{507{,}1} = 0{,}318;$$

характеристика цикла

$$\rho = \frac{\tau_a}{\tau_m} = \frac{172{,}8}{334{,}2} = 0{,}517.$$

Графически характеристики циклических напряжений даны на рис. 3.22.

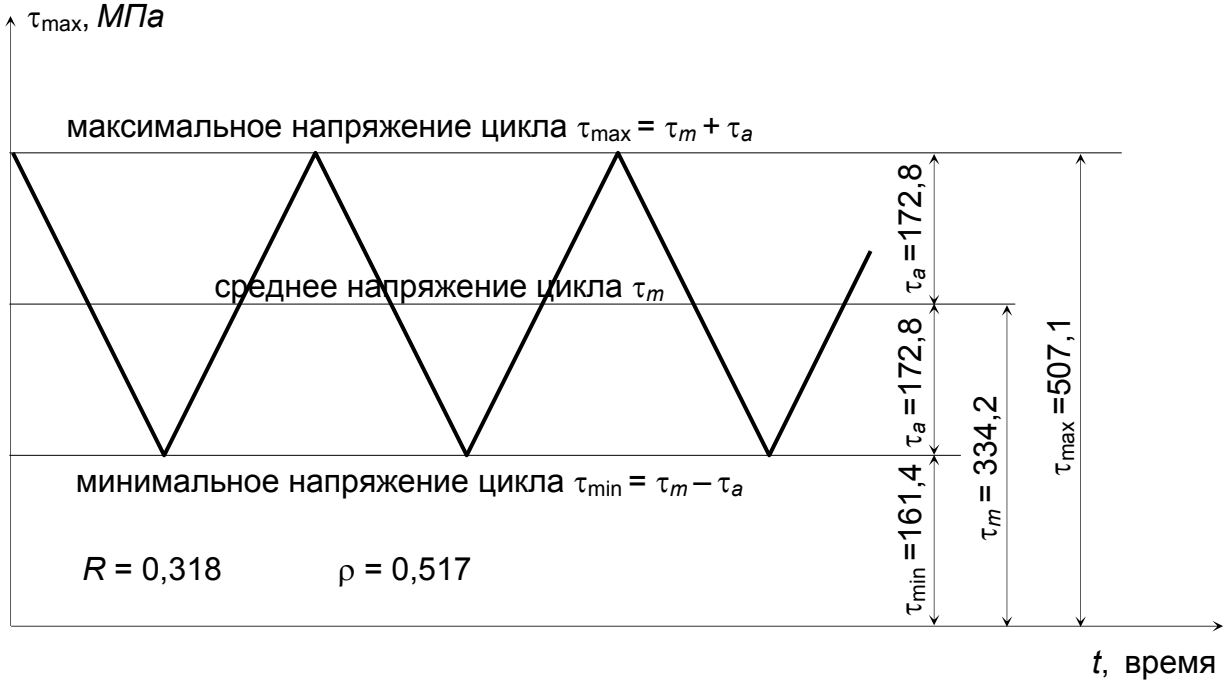


Рис. 3.22. Характеристики цикла напряжений

3. Построение диаграммы предельных амплитуд.

Построение диаграмм усталостной прочности (предельных амплитуд) основано на следующих соображениях. Как известно, опасными для работающих элементов сооружений и машин являются максимальные напряжения, которые при циклическом нагружении представляются в виде суммы ($\tau_{\max} = \tau_m + \tau_a$) среднего (постоянного) и амплитудного (переменного) напряжений. Графически $\tau_{\max}$ можно изобразить в осях $\tau_m 0 \tau_a$ (рис. 3.23) в виде рабочей точки (р.т.) с соответствующими координатами τ_m и τ_a (или σ_m и σ_a) для данного материала.

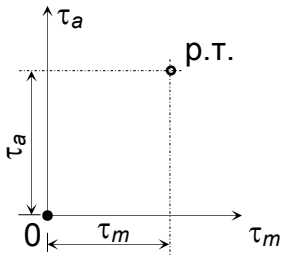


Рис. 3.23. Изображение рабочей точки

Путем экспериментов, которые весьма длительны и трудоемки, на специальных установках определяют *максимальные* напряжения $p_{max} = p_m + p_a$ (под p понимают либо касательные τ, либо нормальные σ напряжения) при различных коэффициентах асимметрии R циклов, при которых испытываемый образец способен неограниченно долго работать в режиме циклического нагружения. Некоторое представление о трех видах основных экспериментов дано на рис. 3.24.

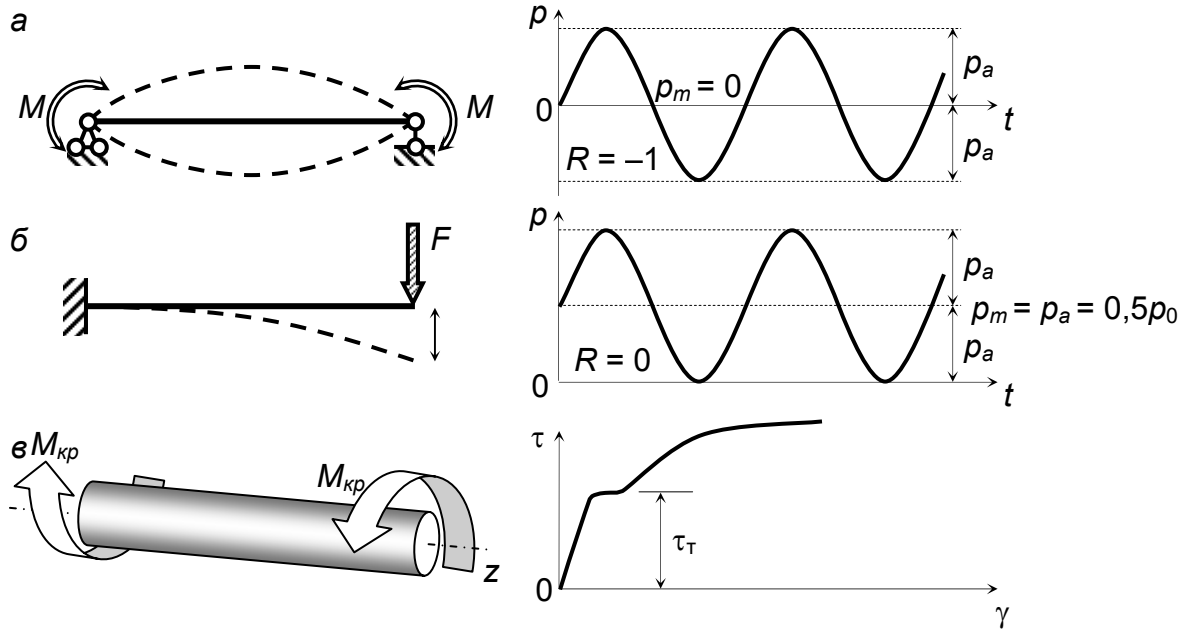


Рис. 3.24. Принципиальные схемы экспериментов: *а* – симмет-

Таким образом получают ряд предельных рабочих точек, которые и составляют некоторую кривую *AC* (рис. 3.25, штриховая линия), являющуюся экспериментальной диаграммой предельных амплитуд. Однако ввиду чрезвычайной сложности таких экспериментов, часто ограничиваются тремя основными испытаниями: определением предела выносливости (усталостной прочности) при симметричном ($R = –1$) цикле, то же при пульсирующем (отнулевом, $R = 0$) цикле и статическом определении предела текучести для пластичных материалов (например, сталей). Это даст три механические характеристики материала – предел выносливости при симметричном цикле p_{-1} (τ_{-1}, σ_{-1}), предел выносливости при отнулевом цикле p_0 (τ_0, σ_0) и предел текучести $p_т$ ($\tau_т$, $\sigma_т$) для каждого вида деформации (растяжение-сжатие, кручение, изгиб) отдельно. На основа-

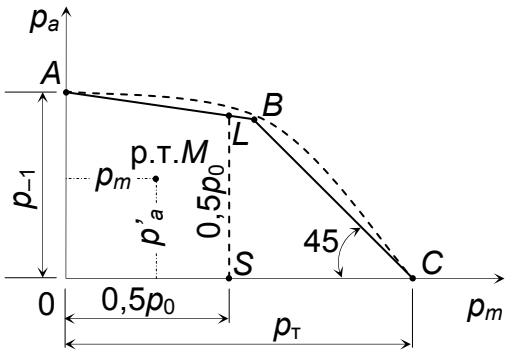


Рис. 3.25. Упрощенная диаграмма предельных амплитуд

нии этих данных строят упрощенную (схематизированную) диаграмму предельных амплитуд *ALBC* (рис. 3.26).

Заметим, что упрощенная диаграмма несколько уменьшает область безопасных циклов 0*AC* (см. рис. 3.25), но эту погрешность не принимают во внимание, так как это идет в запас прочности. Если р.т. *M* рассчитываемой детали окажется внутри области 0*ALBC*, деталь будет работать с определенным запасом n_R усталостной прочности ($n_R > 1$), а если р.т. *M* окажется за пределами области 0*ALBC*, то это означает, что после небольшого числа циклов деталь разрушится ($n_R < 1$).

Построение диаграммы предельных амплитуд (рис. 3.26) в координатных осях $\tau_m 0 \tau_a$ выполняем строго в масштабе.

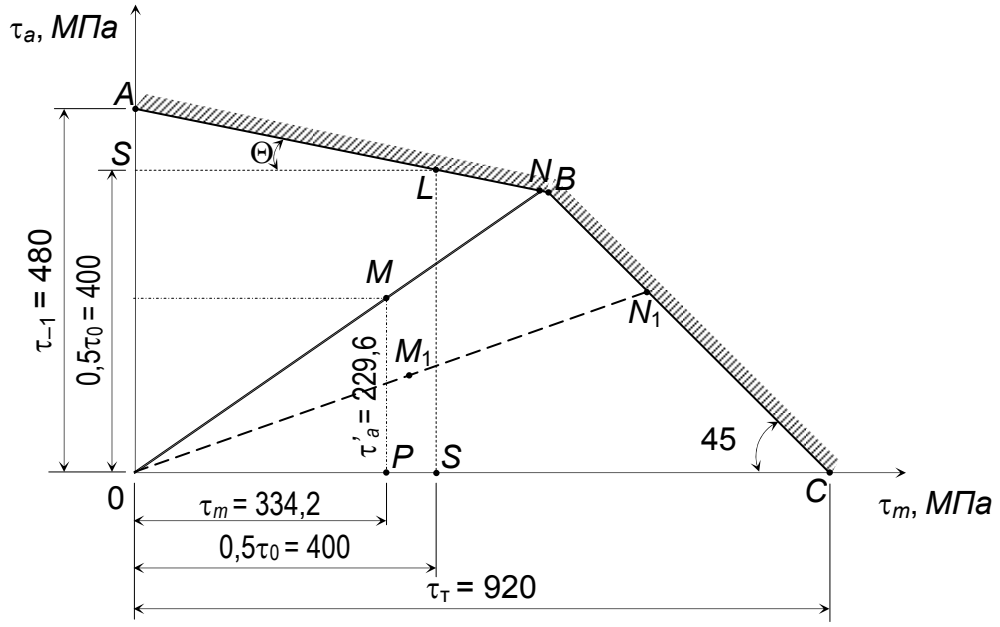


Рис. 3.26. Расчетная диаграмма предельных амплитуд для пружины

Сначала по оси $0\tau_m$ откладываемом в выбранном масштабе отрезок $0C = \tau_т = 92$ *кН/см*^{2} и проводим из точки *C* под углом 45° прямую CC_1, все точки которой соответствуют пределу текучести $\tau_т$. Этим ограждаем область безопасных циклов от появления в пружине недопустимых пластических (остаточных) деформаций.

Далее по оси $0\tau_a$ откладываем в том же масштабе отрезок $0A = \tau_{-1} = 48$ *кН/см*^{2} и отрезок $0S = \tau_0 = 40$ *кН/см*^{2}. Такой же отрезок 0*S* откладываем вдоль оси $0\tau_m$. На пересечении координат 0*S* получаем точку *L*.

Теперь, проводя прямую через точки *A* и *L* до пересечения с прямой CC_1, получаем точку *B*. Прямая *AB* ограждает область безопасных циклов от развития трещин усталости. Диаграмма безопасной работы пружины го-

това и называется аппроксимацией Серенсена–Киносошвили (отечественные ученые), хорошо отражающей работу стальных деталей.

Наконец, следует нанести на диаграмму р.т. *M* пружины, координаты которой таковы: по оси $0\tau_m$ откладываем отрезок $0P = \tau_m = 33{,}45$ *кН/см*^{2}, а по оси $0\tau_a$ – отрезок $PM = \tau'_a = 22{,}96$ *кН/см*^{2}.

Так как τ_a есть напряжение, для которого существенное значение имеют концентрация напряжений, качество обработки поверхности детали и ее размеры (масштабный фактор), то ордината *PM* р.т. *M* вычисляется по формуле

$$\tau'_a = K_\tau \frac{\tau_a}{\beta\varepsilon_\tau} = 1{,}07\,\frac{17{,}28}{0{,}83\cdot 0{,}97} = 22{,}96\ \textit{кН/см}^2.$$

Из начала координат 0 проводим прямую 0*M* до пересечения с диаграммой в точке *N*. Коэффициент запаса усталостной прочности графически определяется отношением отрезков 0*N* и 0*M*, т. е.

$$n_R = \frac{0N}{0M} = \frac{6{,}5\ \textit{см}}{4\ \textit{см}} = 1{,}62,$$

или аналитически по формуле

$$n_R = \frac{\tau_{-1}}{\psi\tau_m + \tau'_a} = \frac{48}{0{,}2\cdot 33{,}42 + 22{,}96} = 1{,}62,$$

где $\psi = \mathrm{tg}\Theta = \dfrac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \dfrac{2\cdot 48 - 80}{80} = 0{,}2$.

Если прямая $0M_1$ пересекает диаграмму в точке N_1, то коэффициент запаса определяется только по пределу текучести:

$$n_\text{т} = \frac{0N_1}{0M_1} = \frac{\tau_\text{т}}{\tau_{\max}}.$$

В данном случае было бы $n_\text{т} = 92 / 50{,}71 = 1{,}81$.

Из двух коэффициентов запаса практическое значение имеет *наименьший* из них.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Руководство к решению задач по сопротивлению материалов (часть 2) содержит примеры исследования работы призматических упругих стержней в составе статически неопределимых конструкций, в условиях сложного сопротивления, продольного изгиба, а также приближенных способов расчета их на удар и вынужденные колебания как систем с одной степенью свободы. В заключение рассмотрен пример определения запаса усталостной прочности цилиндрической клапанной пружины малого шага.

Круг рассмотренных примеров в основном соответствует объему и содержанию самостоятельных работ студентов заочной формы обучения. Примеры содержат краткий теоретический комментарий.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Таблица

Значения коэффициента продольного изгиба φ
для практического расчета сжатых стержней на устойчивость

Гибкость λ	Сталь Ст2, Ст3, Ст4	Сталь Ст5	Сталь повышенного качества $\sigma \geq 320$ *МПа*	Чугун СЧ12-28, СЧ15-32, СЧ18-36, СЧ21-40	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,93	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,90	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,85	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,80	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,72	0,34	0,61
80	0,75	0,67	0,65	0,26	0,49
90	0,69	0,59	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,50	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	–	0,25
120	0,45	0,37	0,30	–	0,22
130	0,40	0,32	0,26	–	0,18
140	0,36	0,28	0,23	–	0,16
150	0,32	0,25	0,21	–	0,14
160	0,29	0,23	0,19	–	0,12
170	0,26	0,21	0,17	–	0,11
180	0,23	0,19	0,15	–	0,10
190	0,21	0,17	0,14	–	0,09
200	0,19	0,15	0,13	–	0,08
210	0,17	0,14	–	–	–
220	0,16	0,13	–	–	–

Линейная интерполяция при определении φ для промежуточных значений гибкости $\lambda_{ст}$

$$\varphi_{ст} = \varphi_{n+1} + \frac{\varphi_n - \varphi_{n-1}}{10}\left(\lambda_{n+1} - \lambda_{ст}\right).$$

Пример: пусть для стойки из Ст3 $\lambda_{ст}$ = 84,3;

$$\lambda_n = 80 < \lambda_{ст} = 84{,}3 < \lambda_{n+1} = 90.$$

$$\varphi_{80} = 0{,}75; \qquad \varphi_{90} = 0{,}69.$$

$$\varphi_{ст} = 0{,}69 + \frac{0{,}75 - 0{,}69}{10}\left(90 - 84{,}3\right) = 0{,}724\,.$$

Условие устойчивости: $\sigma = \dfrac{F}{\varphi A} \mathrm{m}[\sigma]$, где $\varphi = f(\lambda)$.

Формула Эйлера для определения критической силы при $\sigma_{кр} \mathrm{m} \sigma_{пц}$:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu \ell)^2}\,.$$

Формула Ясинского при $\lambda_0 < \lambda_{ст} < \lambda_{пр}$:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} A = (a - b\,\lambda_{ст}),$$

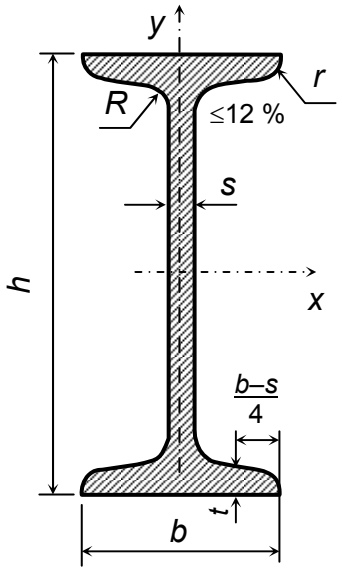
где для стали a = 310 *МПа* и b = 1,14 *МПа*.

$$\lambda_{ст} = \frac{\mu \ell}{i} \qquad i = \sqrt{\frac{J}{A}}$$

Рисунок. Значение коэффициента приведенной длины для сжатых стержней

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

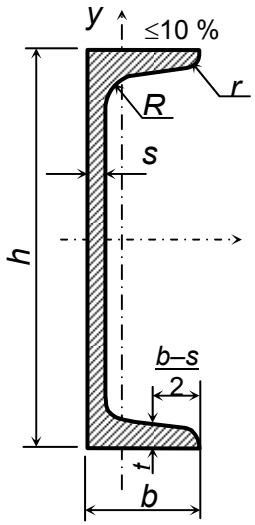
ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ СОРТАМЕНТ (ГОСТ 8239-89)



h – высота профиля
b – ширина полки
s – толщина стенки
t – толщина полки
R, r – радиусы закруглений
A – площадь сечения
J_x, J_y – осевые моменты инерции
W_x, W_y – осевые моменты сопротивления
i_x, i_y – радиусы инерции
S_x – статический момент полусечения

№	Размеры, мм						Площадь *A*, см^2	Масса 1 м, кг	J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см
	h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*									
10	100	55	4,5	7,2	7	2,5	12	9,46	198	39,7	4,06	23	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8	3	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109	6,57	62,3	58,6	14,5	1,7
18	180	90	5,1	8,1	9	3,5	23,4	18,4	1290	143	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4	26,8	21	1840	184	8,28	104	115	23,1	2,07
22	220	110	5,4	8,7	10	4	30,6	24	2550	232	9,13	131	157	28,6	2,27
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4	34,8	27,3	3460	289	9,97	163	198	34,5	2,37
27	270	125	6	9,8	11	4,5	40,2	31,5	5010	371	11,2	210	260	41,5	2,54
30	300	135	6,5	10,2	12	5	46,5	36,5	7080	472	12,3	268	337	49,9	2,69
33	330	140	7	11,2	13	5	53,8	42,2	9840	597	13,5	339	419	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14	6	61,9	48,6	13380	743	14,7	423	516	71,1	2,89
40	400	155	8,3	13	15	6	72,6	57	19062	953	16,2	545	667	86,1	3,03
45	450	160	9	14,2	16	7	84,7	66,5	27696	1231	18,1	708	808	101	3,09
50	500	170	10	15,2	17	7	100	78,5	39727	1589	19,9	919	1043	123	3,23
55	550	180	11	16,5	18	7	118	92,6	55962	2035	21,8	1181	1356	151	3,39
60	600	190	12	17,8	20	8	138	108	76806	2560	23,6	1491	1725	182	3,54

ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ СОРТАМЕНТ (ГОСТ 8240-89)



h – высота профиля
b – ширина полки
s – толщина стенки
t – толщина полки
R, *r* – радиусы закруглений
A – площадь сечения
J_x, J_y – осевые моменты инерции
W_x, W_y – осевые моменты сопротивления
i_x, i_y – радиусы инерции
S_x – статический момент полусечения
z_0 – абсцисса ц.т.

№	Размеры, мм						Площадь A, см^2	Масса 1 м, кг	J_x, см^4	W_x, см^3	i_x, см	S_x, см^3	J_y, см^4	W_y, см^3	i_y, см	z_0, см
	h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*										
5	50	32	4,4	7	6	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,95	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6	2,5	7,51	5,9	48,6	15	2,54	9	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7	3	10,9	8,59	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3	13,3	10,4	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8	3	15,6	12,3	491	70,2	5,6	40,8	45,4	11	1,7	1,67
16	160	64	5	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16а	160	68	5	9	8,5	3,5	19,5	15,3	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2
18	180	70	5,1	8,7	9	3,5	20,7	16,3	1090	121	7,24	69,8	86	17	2,04	1,94
18а	180	74	5,1	9,3	9	3,5	22,2	17,4	1190	132	7,32	76,1	105	20	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9	9,5	4	23,4	18,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,2	2,07
22	220	82	5,4	9,5	10	4	26,7	21	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
24	240	90	5,6	10	10,5	4	30,6	24	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,6	2,42
27	270	95	6	10,5	11	4,5	35,2	27,7	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11	12	5	40,5	31,8	5810	387	12	224	327	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7	11,7	13	5	46,5	36,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14	6	53,4	41,9	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8	13,5	15	6	61,5	48,3	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ПО МЕТОДУ МОРА. СПОСОБ ВЕРЕЩАГИНА

На основе принципа возможных перемещений немецким ученым Отто Мором в 1874 г. была предложена формула для определения упругих перемещений в линейно деформируемых стержневых системах (интегралы Мора), которая в общем случае внешних статических воздействий содержит двенадцать слагаемых (учет силовых, температурных и деформационных факторов).

При тех или иных условиях работы стержневой системы учитывают те факторы, которые вносят решающую долю в определяемые перемещения.

Пусть Δ_{iF} – перемещение (линейное или угловое) в выбранной точке по любому направлению i от нагрузки F. Тогда для систем, составленных из призматических стержней, т. е. прямолинейных и постоянного поперечного сечения, используем следующие формулы Мора:

а) для шарнирно стержневых систем при узловой нагрузке (т. е. для ферм)

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{N_F \overline{N}_i \ell}{EA},$$

где N_F – усилия в стержнях при грузовом состоянии системы; $\overline{N}_i$ – усилия в стержнях при единичном состоянии системы от безразмерной силы $\overline{F}_K = 1$, прикладываемой к выбранному узлу K фермы в любом направлении i; P – длина стержня, EA – жесткость стержня при осевой деформации;

б) для балок и плоских плоскоработающих рам, состоящих из относительно жестких стержней (изгибаемые стержни считаются жесткими, если углы поворота сечений малы в сравнении с единицей, а кривизна мала в сравнении с величиной h/P^2, где h – высота сечения стержня, а P – его длина)

$$\Delta_{iF} = \sum \int_S \frac{M_F \overline{M}_i ds}{EJ},$$

где M_F – изгибающие моменты грузового состояния системы; $\overline{M}_i$ – изгибающие моменты единичного состояния системы от безразмерной силы $\overline{F}_K = 1$ (при определении линейного перемещения), прикладываемой в выбранной точке K системы по любому направлению i, или от единичного

безразмерного момента $\overline{m}_K = 1$ в той же точке при определении угла поворота сечения; EJ – изгибная жесткость сечений;

в) для прямых валов при кручении с изгибом

$$\Delta_{iF} = \sum \int_S \frac{M_F^{изг} \overline{M}_i^{изг} ds}{EJ} + \sum \int_S \frac{M_F^{кр} \overline{M}_i^{кр} ds}{GJ_{кр}},$$

где $M_F^{изг}$, $M_F^{кр}$ – изгибающие и крутящие моменты грузового состояния системы; $\overline{M}_i^{изг}$, $\overline{M}_i^{кр}$ – изгибающие и крутящие моменты единичных состояний системы от $\overline{F}_K = 1$ или $\overline{m}_K = 1$; EJ, $GJ_{кр}$ – жесткости сечений при изгибе и кручении (E, $G_{кр}$ – модули упругости при продольной и сдвиговой деформациях).

В приведенных выше формулах знак Σ означает алгебраическое суммирование по всем участкам или стержням системы.

При условии постоянства в пределах участков или отдельных стержней их жесткостей (EA, EJ, $GJ_{кр}$ – const) и прямолинейности единичных эпюр усилий $\overline{N}_i$, $\overline{M}_i^{изг}$, $\overline{M}_i^{кр}$ вычисление интегралов Мора, которое аналитически довольно громоздко, удобно заменить графоаналитическим способом, предложенным в 1925 г. студентом МИИТа А.Н. Верещагиным, суть которого состоит в следующем (см. рисунок):

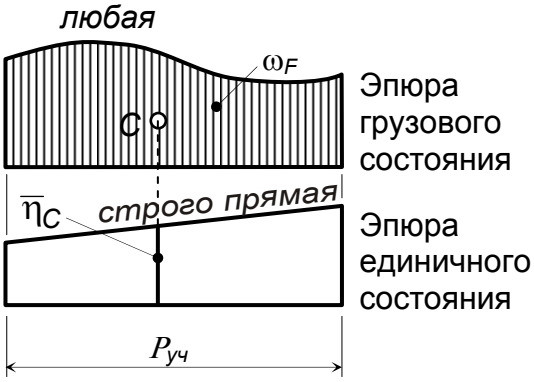


Рисунок. Способ А.Н. Верещагина

1) эпюра грузового состояния разбивается на участки одного знака так, чтобы соответствующая ей эпюра единичного состояния в пределах каждого из этих участков была строго прямолинейной (хотя бы и разных знаков) и жесткость сечений стержня была бы постоянной;

2)вычисляется площадь ω_F участка эпюры грузового состояния и определяется положение ее центра тяжести C;

3) в эпюре единичного состояния строго под центром тяжести площади ω_F вычисляется ордината $\overline{\eta}_C$;

4) искомое перемещение Δ_{iF} определяется по формуле Верещагина (“перемножением эпюр”)

$$\Delta_{iF} = \sum \frac{1}{B} \omega_F \overline{\eta}_C,$$

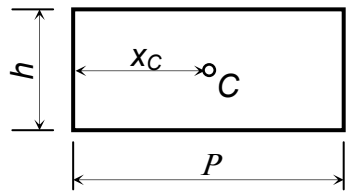
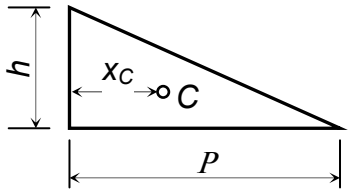
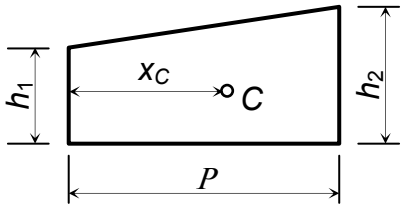
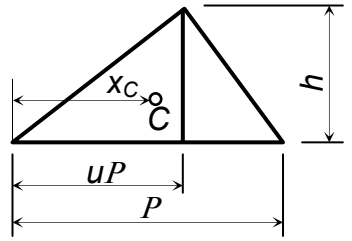
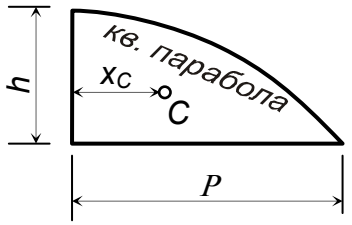
где B – соответствующая рассматриваемой деформации жесткость поперечных сечений стержня. Разумеется, следует учитывать знаки эпюр грузового и единичного состояния системы. Так как направления единичных

факторов $\overline{F}_K = 1$ или $\overline{m}_K = 1$ выбирают произвольно, то знак плюс (минус) у найденного перемещения Δ_{iF} означает, что оно совпадает (не совпадает) с его истинным направлением.

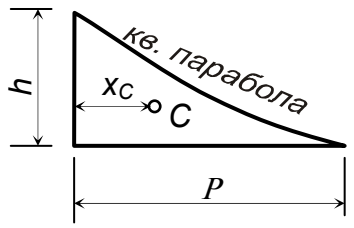
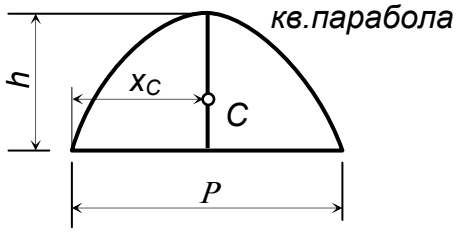
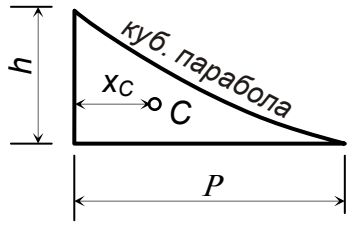
Продолжение прил. 4

Таблица

Площади и положение центров тяжести элементарных фигур

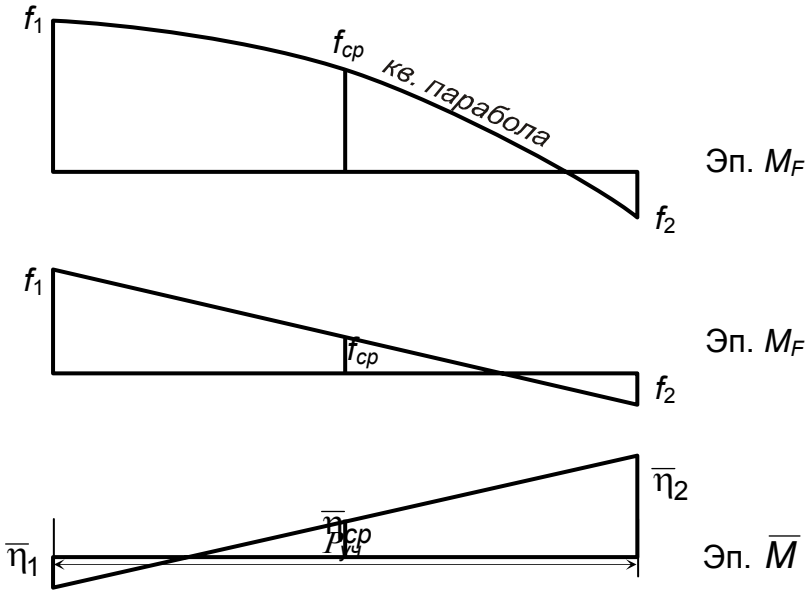
Фигура	Положение центра тяжести	Площадь
	$x_C = \frac{1}{2}\ell$	$\omega = hP$
	$x_C = \frac{1}{3}\ell$	$\omega = \frac{1}{2}h\ell$
	$x_C = \frac{h_1 + 2h_2}{3(h_1 + h_2)}\ell$	$\omega = \frac{h_1 + h_2}{2}\ell$
	$x_C = \frac{\ell}{3}(1+u)$	$\omega = \frac{1}{2}h\ell$
	$x_C = \frac{3}{8}\ell$	$\omega = \frac{2}{3}h\ell$

Окончание таблицы

Фигура	Положение центра тяжести	Площадь
	$x_C = \frac{1}{4}\ell$	$\omega = \frac{1}{3}h\ell$
	$x_C = \frac{1}{2}\ell$	$\omega = \frac{2}{3}h\ell$
	$x_C = \frac{1}{5}\ell$	$\omega = \frac{1}{4}h\ell$

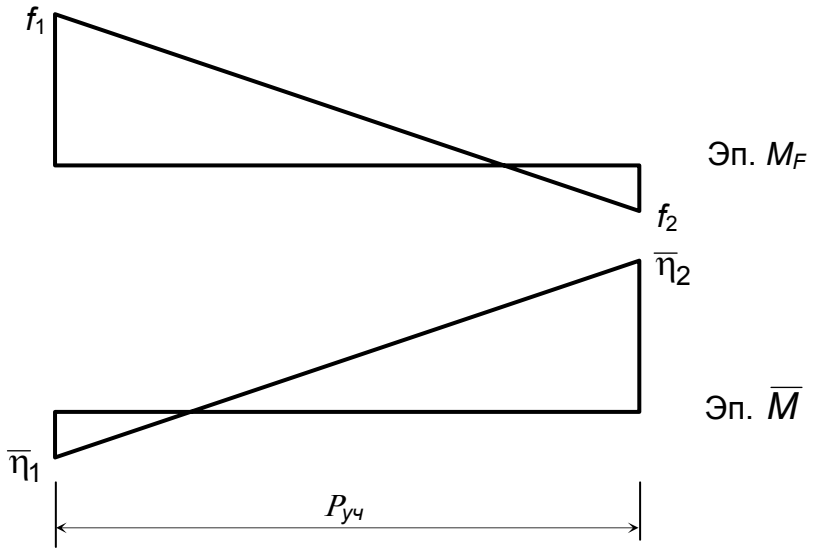
Правила перемножения эпюр:

– Симпсона



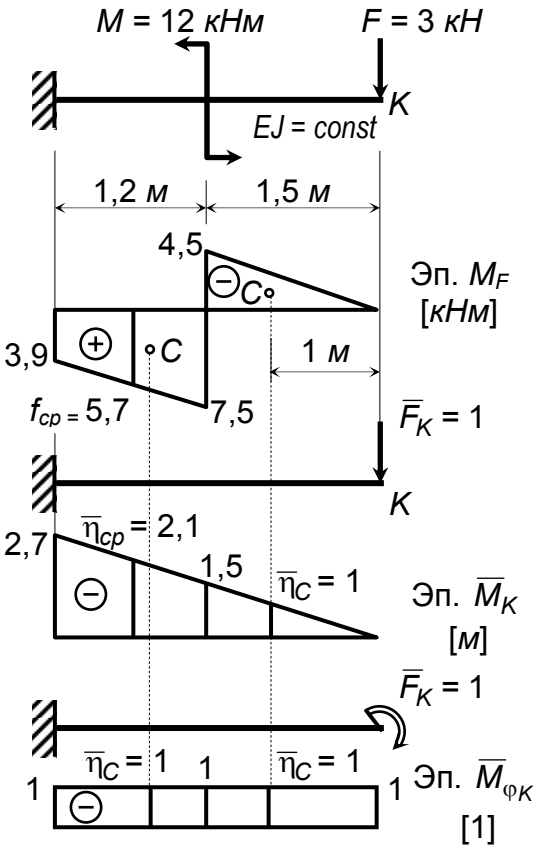
$$\Delta_{iF} = \frac{\ell_{уч}}{6B}\left[f_1\overline{\eta}_1 + 4f_{ср}\overline{\eta}_{ср} + f_2\overline{\eta}_2\right]$$

– трапеций



$$\Delta_{iF} = \frac{\ell_{уч}}{6B}\left[2f_1\overline{\eta}_1 + 2f_2\overline{\eta}_2 + f_1\overline{\eta}_2 + f_2\overline{\eta}_1\right].$$

Пример. Определить прогиб и угол поворота сечения *K*.



$$\Delta_{KF} = "M_F \times \overline{M}_K" =$$

$$= \frac{1{,}2}{6EJ}[3{,}9\cdot(-2{,}7) + 4\cdot 5{,}7\cdot(-2{,}1) + 7{,}5\cdot(-1{,}5)] +$$

$$+ \frac{1}{EJ}\cdot\frac{(-4{,}5)\cdot 1{,}5}{2}\cdot(-1) = -\frac{66{,}285}{EJ}\,[\text{ед.длины}];$$

$$\varphi_{KF} = "M_F \times \overline{M}_{\varphi_K}" =$$

$$= \frac{1}{EJ}\cdot\frac{3{,}9+7{,}5}{2}\cdot 1{,}2\cdot(-2{,}1) + \frac{1}{EJ}\cdot\frac{(-4{,}5)\cdot 1{,}5}{2}\cdot(-1) =$$

$$= -\frac{10{,}989}{EJ}\,[\text{рад}].$$

Отрицательные значения прогиба Δ_{KF} и угла поворота означают, что их истинные направления обратны направлениям $\overline{F}_K$ и $\overline{m}_K$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ПРОГРАММА
подготовки к экзамену по сопротивлению материалов (часть 2)

I. Повторение основных разделов I части курса.

1. Геометрические характеристики плоских сечений стержней (площадь, центр тяжести сечения, моменты инерции, моменты сопротивления).

2. Построение эпюр усилий. Опасное сечение. Условие прочности и подбор сечений по допускаемым напряжениям.

3. Определение перемещений методом Мора (интеграл Мора). Способ Верещагина. Условия жесткости.

II. Статически неопределимые стержневые системы.

1. Статически неопределимые системы при осевой деформации стержней. Степень статической неопределимости. Уравнения совместности деформаций.

2. Расчет по методу допускаемых напряжений и методу разрушающих нагрузок (по предельному состоянию).

3. Неразрезные балки. Степень статической неопределимости. Уравнения совместности деформаций по методу сил.

4. Построение расчетных эпюр изгибающих моментов и поперечных сил в неразрезных балках. Контроль расчета усилий.

5. Подбор сечения неразрезной балки по допускаемым напряжениям. Условие жесткости балок.

III. Напряженно-деформированное состояние в точках деформируемого твердого тела.

1. Типы напряженного состояния (линейное, плоское, объемное). Понятие о тензоре напряжения. Главные площадки и главные нормальные напряжения.

2. Определение главных нормальных напряжений при линейном и плоском напряженных состояниях.

3. Линейные и угловые деформации в точках деформируемого тела. Главные линейные деформации.

4. Обобщенный закон Гука и его частные случаи.

5. Третья и четвертая теории прочности. Теория прочности Мора.

IV. Сложное сопротивление стержней.

1. Косой изгиб (или сложный изгиб). Вычисление нормальных напряжений.

2. Внецентренное сжатие или растяжение. Нормальные напряжения в поперечном сечении. Положение нулевой линии в сечении. Проверка прочности. Ядро сечения.

3. Кручение с изгибом прямых круглых валов. Проверка прочности по III и IV теориям прочности.

V. Устойчивость прямых центрально сжатых стержней постоянного сечения.

1. Понятие об устойчивом, неустойчивом и безразличном состоянии равновесия твердых тел. Понятие о потере устойчивости (выпучивании) сжатого упругого стержня.

2. Понятие о критической силе $F_{кр}$. Формула Эйлера для $F_{кр}$. Учет способа закрепления концов сжатого стержня на величину $F_{кр}$. Понятие о приведенной длине сжатого стержня.

3. Пределы применимости формулы Эйлера. График критических напряжений как функции гибкости λ стержней из малоуглеродистой стали. Формула Ясинского.

4. Практический расчет сжатых стержней с использованием коэффициента продольного изгиба φ.

VI. Динамические задачи сопротивления материалов.

1. Понятие о динамической нагрузке. Динамический коэффициент.

2. Расчет троса при равноускоренном подъеме груза.

3. Проверка прочности при поперечном ударе по балке.

4. Учет массы конструкции при расчетах на удар. Ударная проба.

5. Колебания упругих систем с одной степенью свободы. Основные понятия. Периодические колебания. Период и частота собственных колебаний.

6. Вынужденные колебания упругих систем с одной степенью свободы. Явление резонанса. Меры борьбы с резонансом. Динамический коэффициент и проверка прочности.

VII. Понятие об усталостной прочности материала при циклически переменных напряжениях.

1. Характеристики циклов. Механизм усталостного разрушения.

2. Предел выносливости при симметричном цикле.

3. Факторы, влияющие на величину предела выносливости.

4. Диаграмма предельных амплитуд. Определение коэффициента запаса усталостной прочности деталей.

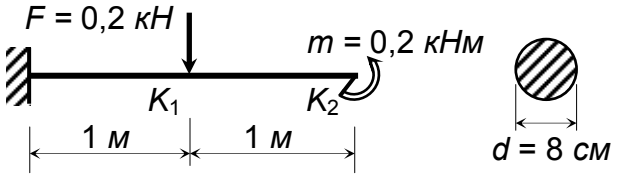
При подготовке рекомендуется использовать лекции, любые доступные учебники и руководства к решению задач, консультации. Хорошо знать содержание собственных контрольных работ.

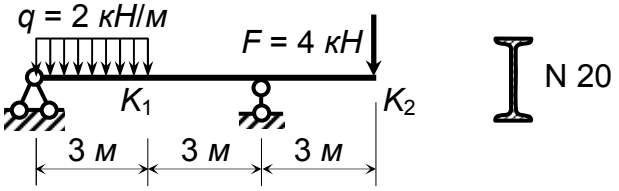
ПРИЛОЖЕНИЕ 6

ЗАДАЧИ
для самоподготовки студентов к экзамену

Задача 1

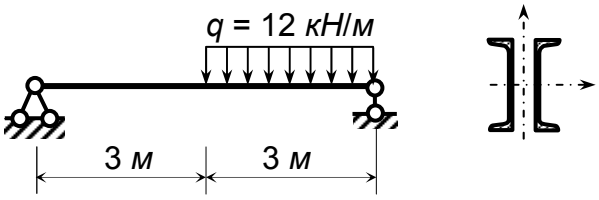
Для балок определить прогибы и углы поворота сечений K_1 и K_2 по методу Мора. Материал балок – сталь ($E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*). Изобразить схему изогнутой оси.





Задача 2

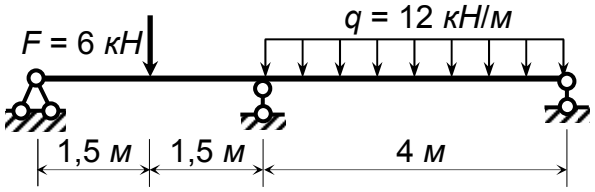
Проверить жесткость балки при допускаемом прогибе $[f] = \frac{1}{400}\ell$, где пролет ℓ = 6 *м*. Сечение балки подобрать из двух швеллеров при $[\sigma]$ = 160 *МПа*.



Задача 3

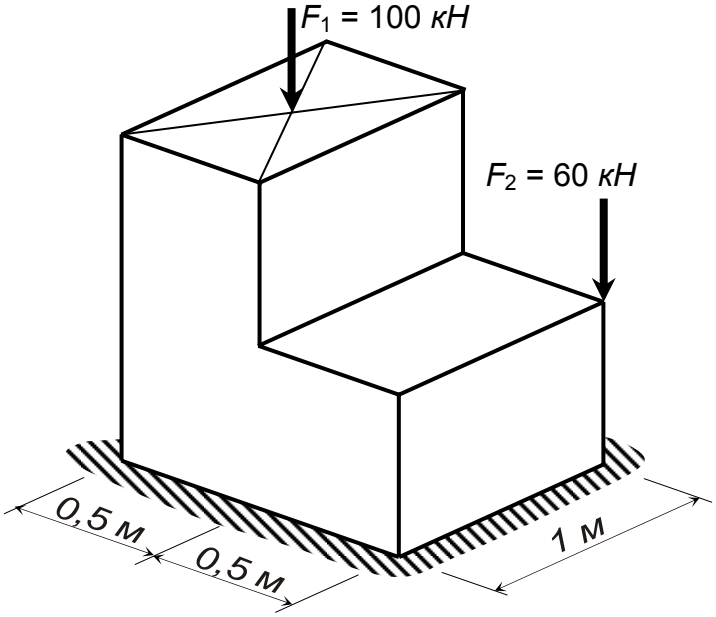
Для неразрезной балки:

1) построить эпюры *M* и *Q*;
2) проверить равновесие балки;
3) подобрать двутавровое сечение балки из условия прочности при $[\sigma]$ = 160 *МПа*.



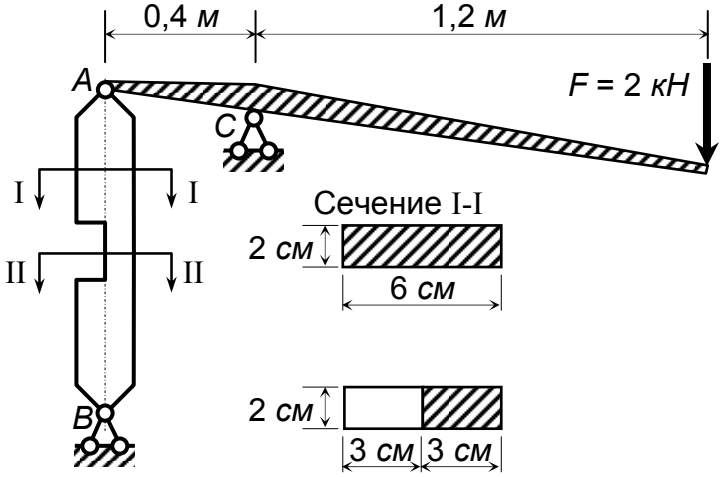
Задача 4

Жесткий брус нагружен силами F_1 и F_2. Построить эпюры нормальных напряжений по подошве бруса от действия каждой силы отдельно.



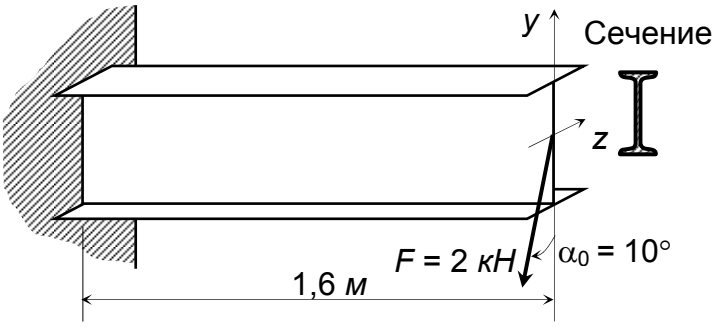
Задача 5

Сравнить наибольшие нормальные напряжения в стержне АВ по сечениям I-I и II-II.



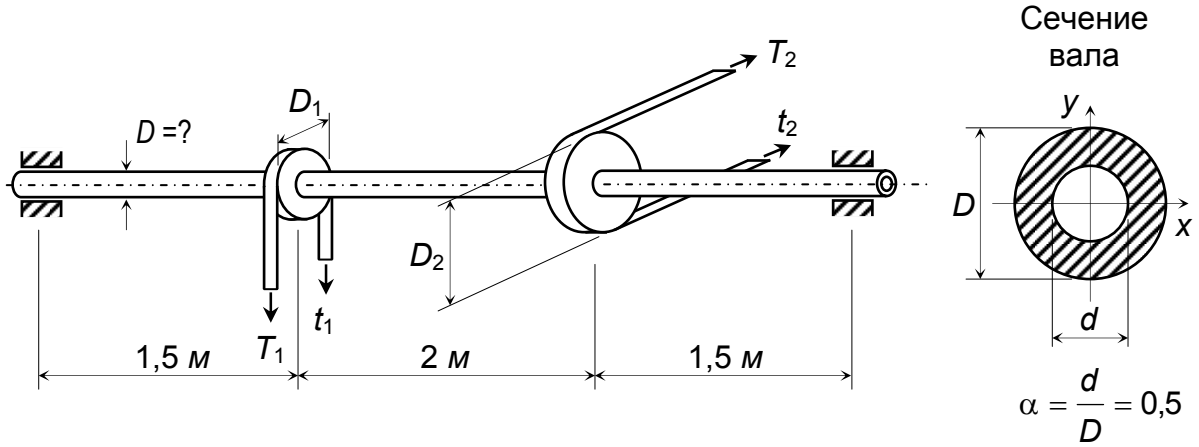
Задача 6

Для двутавровой консоли:
1) построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении;
2) определить величину и направление полного прогиба конца балки.



Задача 7

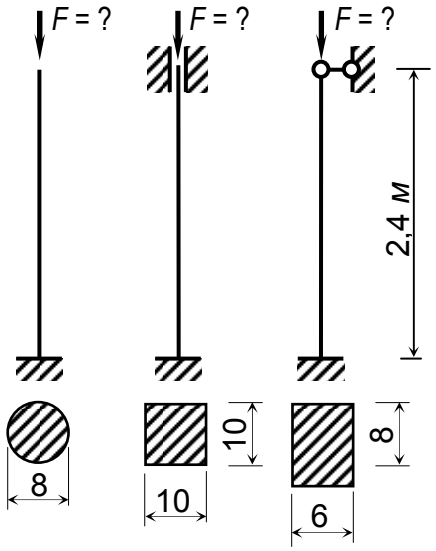
Вал трубчатого сечения имеет два шкива диаметрами D_1 = 0,3 *м*, D_2 = 0,5 *м* и передает мощность *W* = 200 *кВт* при *n* = 300 *об/мин*. Считая, что натяжение ветвей ременных передач $T_i = 2t_i$, по третьей теории прочности подобрать размеры сечения при [σ] = 120 *МПа*.



Задача 8

Определить критическое значение сил $F_{кр}$ для указанных стоек. Использовать полный график критических напряжений для стали Ст3 (E = 2·10^5 *МПа*, $\sigma_{пц}$ = 200 *МПа*, $\sigma_т$ = 240 *МПа*, коэффициенты Ясинского для стали a = 310 *МПа*, b = 1,14 *МПа*).

Размеры поперечных сечений указаны в сантиметрах.



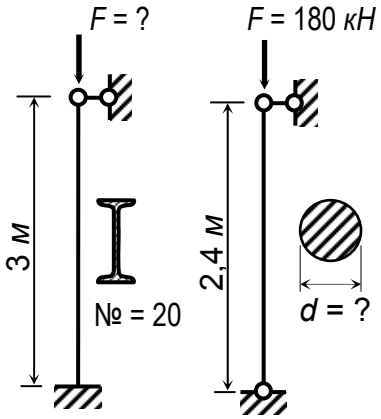
Задача 9

Для сжатых стоек:

1) определить допускаемую нагрузку при [σ] = 190 *МПа*;

2) подобрать диаметр круглого сечения стойки при [σ] = 160 *МПа*. Материал – сталь Ст3.

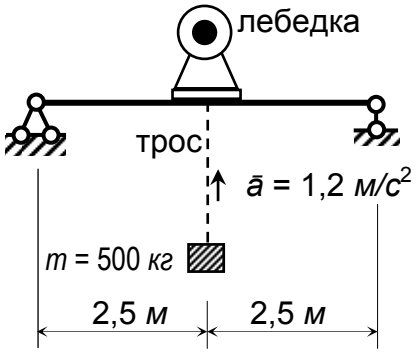
При расчетах использовать таблицу коэффициентов φ продольного изгиба прямых стержней.



Задача 10

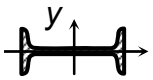
Проверить прочность балки (I № 16) при [σ] = 160 *МПа*. Балка нагружена лебедкой весом 3 *кН*, поднимающей на тросе груз массой *m* = 500 *кг* с ускорением $\bar{a}$ = 1,2 *м/с*^{2}.

Массой балки пренебречь.

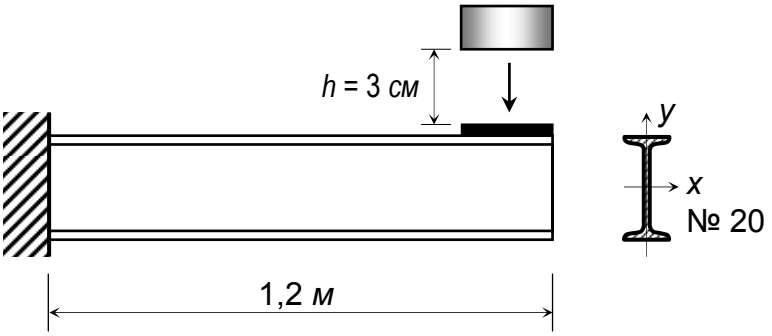


Задача 11

1. На балку с высоты *h* = 3 *см* сбрасывается груз массой *m* = 300 *кг.* Проверить прочность балки при [σ] = 120 *МПа*. Сечение балки I № 20. Массой балки пренебречь.

2. Решить задачу при положении двутавра плашмя, т. е. когда сечение имеет вид 

.

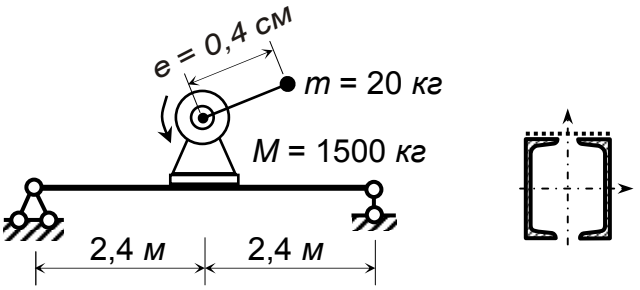


Задача 12

На балке сечением из двух швеллеров № 18 установлен двигатель массой *M* = 1500 *кг*. При работе двигателя, ротор которого делает *n* = 900 об/мин, возникает вибрация из-за неуравновешенной массы *m* = 20 *кг*, вращающейся с эксцентриситетом *e* = 0,4 *см.*

1. Проверить балку на резонанс.
2. Проверить прочность при [σ] = 140 *МПа*.

Массой балки пренебречь.



БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Александров, А. В. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Александров, В. Д. Потапов, Б. П. Державин. – М. : Высш. шк., 2000. – 560 с.

2. Бобрин, В. А. Методические указания к выполнению контрольных работ по сопротивлению материалов (I и II части) для студентов третьего курса заочного факультета : метод. указания / сост. В. А. Бобрин. – Хабаровск : Изд-во ХабИИЖТ, 1983. – 22 с.

3. Волков, А. С. Колебания систем с конечным числом степеней свободы : учеб. пособие / А. С. Волков. – Хабаровск : Изд-во ДВГАПС, 1994. – 70 с.

4. Расчет сжатых стержней на устойчивость : метод. указания / сост. А. С. Волков. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2001. – 32 с.

5. Гернет, М. М. Курс теоретической механики : учеб. пособие / М. М. Гернет. – М. : Высш. шк., 1987. – 344 с.

6. Дарков, А. В. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – М. : Высш. шк., 1989. – 624 с.

7. Киносошвили, Р. С. Сопротивление материалов. Краткий учебник (пособие для самообразования) : учеб. пособие / Р. С. Киносошвили. – М. : Наука, 1975. – 384 с.

8. Любошиц, М. И. Справочник по сопротивлению материалов : справ. / М. И. Любошиц, Г. М. Ицкович. – Минск : Вышэйшая школа, 1969. – 464 с.

9. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / под ред. Г. С. Писаренко. – Киев : Вища школа. Головное изд-во, 1979. – 696 с.

10. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов : учеб. пособие для втузов / И. Н. Миролюбов [и др.]. – М. : Высш. шк., 1985. – 400 с.

11. Саргсян, А. Е. Сопротивление материалов, теории упругости и пластичности. Основы теории с примерами расчета : учеб. для вузов / А. Е. Саргсян. – М. : Высш. шк., 2000. – 286 с.

12. Сопротивление материалов : учеб. для втузов / под ред. Н. А. Костенко. – М. : Высш. шк., 2000. – 430 с.

13. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Высш. шк., 1975. – 500 с.

14. Писаренко, Г. С. Справочник по сопротивлению материалов : справ. / Г. С. Писаренко, А. П. Яковлев, В. В. Матвеев. – Киев : Наукова думка, 1988. – 736 с.

15. Степин, П. А. Сопротивление материалов : учеб. для немашиностроит. специальностей вузов / П. А. Степин. – М. : Высш. шк., 1983. – 303 с.

16. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов : учеб. для вузов / В. И. Феодосьев. – М. : Наука, 1979. – 560 с.

17. Шестаков, А. В. Расчет неразрезных балок : учеб. пособие / А. В. Шестаков. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2001. – 146 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫЕ СИСТЕМЫ 4
1.1. Задача 10. Определение несущей способности статически..... 4
неопределимой системы при осевой деформации по методам..... 4
допускаемых напряжений и разрушающих нагрузок 4
1.2. Задача 11. Расчет статически неопределимой балки 10
2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ..... 17
2.1. Задача 12. Одновременный изгиб призматической балки
в главных ее плоскостях. Подбор сечения при сложном изгибе
по допускаемым напряжениям 18
2.2. Задача 13. Сложное сопротивление жесткого бруса 22
2.3. Задача 14. Проверка прочности стержня круглого поперечного
сечения при сложном напряженном состоянии 27
3. РАСЧЕТЫ НА УСТОЙЧИВОСТЬ, ДИНАМИКУ И ВЫНОСЛИВОСТЬ..... 31
3.1. Задача 15. Расчеты на устойчивость
центрально сжатых прямых стержней 31
3.2. Задача 16. Расчеты на удар..... 39
3.3. Задача 17. Гармонические колебания упругих систем. Свободные и
вынужденные колебания систем с одной степенью свободы 44
3.4. Задача 18. Вычисление коэффициента запаса усталостной
прочности цилиндрической пружины при циклическом нагружении ..56
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 64
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ..... 65
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ДВУТАВРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ
СОРТАМЕНТ (ГОСТ 8239-89) 67
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ШВЕЛЛЕРЫ СТАЛЬНЫЕ ГОРЯЧЕКАТАНЫЕ
СОРТАМЕНТ (ГОСТ 8240-89) 68
ПРИЛОЖЕНИЕ 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ УПРУГИХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ
В СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМАХ ПО МЕТОДУ МОРА.
СПОСОБ ВЕРЕЩАГИНА..... 69
ПРИЛОЖЕНИЕ 5. ПРОГРАММА подготовки к экзамену
по сопротивлению материалов (часть 2) 74
ПРИЛОЖЕНИЕ 6. ЗАДАЧИ для самоподготовки студентов к экзамену 76
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 81

Учебное издание

Бобрин Виктор Александрович

Бобушев Сергей Алексеевич

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Часть 2

Учебное пособие

Редактор *Н.В. Смышляева*
Технический редактор *С.С. Заикина*

План 2006 г. Поз. 4.15. ИД № 05247 от 2.07.2001 г.
Сдано в набор 22.12.2005 г. Подписано в печать 05.06.2006 г.
Формат 60×84 1/16. Бумага тип. № 2. Гарнитура «Arial». Печать RISO.
Усл. печ. л. 4,8. Зак. 201. Тираж 375 экз.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.